Métodos da Física Teórica I – 2019/1
1ª lista de exercícios – respostas

1.

$$\text{a)}\ -1 = e^{i\pi}\,, \qquad \text{b)}\ -i = e^{3i\pi/2}\,, \qquad \text{c)}\ \frac{1}{64} + i\frac{\sqrt{3}}{64} = \frac{1}{32}e^{i\pi/3}\,.$$

2.

$$\text{a)}\ \left(e^{i\pi/6}, e^{5i\pi/6}, e^{3i\pi/2} = -i\right)\,, \qquad \text{b)}\ \left(e^{i55^\circ}, e^{i115^\circ}, e^{i175^\circ}, e^{i235^\circ}, e^{i295^\circ}, e^{i355^\circ}\right)\,.$$

3. $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \iff |z| = 1$, donde $z = e^{i\phi}$, $(\phi \in \mathbb{R})$. No plano complexo, as soluções formam um círculo de raio 1 e centro na origem.

4. Escrevendo $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, $(\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$, temos

$$|z_1 z_2| = \left||z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2}\right| = \left||z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right| = \left||z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2)\right]\right| =$$

$$= \sqrt{|z_1|^2|z_2|^2\left[\cos^2(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{sen}^2\,(\theta_1+\theta_2)\right]} = \sqrt{|z_1|^2|z_2|^2} = |z_1||z_2|\,.$$

Usando o resultado acima, temos que $|\overline{z_1}| = \left||z_1|e^{-i\theta_1}\right| = \left||z_1|\right|\left|e^{-i\theta_1}\right| = |z_1|$.

5. $|a-b|$ é a distância entre os pontos a e b; portanto, os pontos z que satisfazem à primeira equação são aqueles que estão a uma distância R do ponto $-z_0$ (note que $z + z_0 = z - (-z_0)$). O conjunto de pontos do plano que estão a uma mesma distância R de um dado ponto $\mathcal{O}$ (fixo) é a definição de um círculo de raio R e centro em $\mathcal{O}$.
A segunda equação decorre da primeira, uma vez que qualquer número complexo a pode ser escrito na forma polar $|a|e^{i\theta}$.
A terceira equação decorre da segunda, sendo obtida ao multiplicarmos esta por sua conjugada $\overline{z} + \overline{z_0} = Re^{-i\varphi}$.
Finalmente, a terceira equação implica a primeira, já que o que aparece no lado esquerdo daquela é igual a $(z+z_0)(\overline{z}+\overline{z_0}) = |z+z_0|^2$.
Fica assim demonstrado que as três equações são equivalentes.

6. É o conjunto formado pelos pontos abaixo da, ou contidos na, reta $y = -2$.

7.
$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(4\theta) &= \mathrm{Im}\left[e^{4i\theta}\right] = \mathrm{Im}\left[(e^{i\theta})^4\right] = \mathrm{Im}[(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^4] = \\ &= \mathrm{Im}[\cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 6\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 4i\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta + \mathrm{sen}^4\,\theta] \\ &= 4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta\,,\end{aligned}$$
onde usamos $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, com $a = \cos\theta$ e $b = i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

8. Note que a equação diz que $z(i-1)$ é igual ao seu conjugado complexo e, portanto, um número real. Assim, escrevendo $z = x + iy$, temos que $\mathrm{Im}[(x+iy)(i-1)] = \mathrm{Im}[-x-y+i(x-y)] = 0$ se, e somente se, $x = y$.

9. $u(x,y) = e^x\cos y, \quad v(x,y) = e^x\,\mathrm{sen}\,y$.

10. $z = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3}), \quad n \in \mathbb{Z}$.