Métodos da Física Teórica I – 2019/1
1º exercício extra

1. Seja $h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi)$, onde $f(x)$ é tal que $h(x)$ satisfaz às condições de Dirichlet.

a) Mostre que $h(x)$ tem período 2π.

b) Expanda $h(x)$ em uma série de Fourier complexa de período 2π, i.e. escreva

$$h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}\,,$$

e mostre que $c_n = \widetilde{f}(n)$, onde $\widetilde{f}$ é a transformada de Fourier de f.
(Dica: escreva c_n como uma integral de 0 a 2π e, então, faça a mudança de variável $u := x + 2k\pi$.)

c) Escrevendo $h(0)$ de duas formas diferentes, obtenha a importante *Fórmula Somatória de Poisson*,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{f}(n)\,,$$

que possui inúmeras aplicações, por exemplo, em Mecânica Estatística e Óptica.

d) Substituindo $f(x) = (2\varphi - |x|)\,\theta(2\varphi - |x|)$ (pulso triangular) na fórmula acima, mostre que, se $0 < \varphi < \pi$, então

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(n\varphi)}{n}\right)^2 = \pi\varphi \qquad (0 < \varphi < \pi)\,.$$

e) Finalmente, aproveitando que você já calculou $\widetilde{f}(k)$, use o teorema de Parseval para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(k\varphi)}{k}\right)^4 \mathrm{d}k = \frac{2\pi}{3}\varphi^3\,,$$

para qualquer $\varphi \in \mathbb{R}$.