MOVIMENTO OSCILATÓRIO E CAOS

Vamos começar do capítulo 3

Capítulo 1 –

Decaimento radioativo

- Capítulo 2 –

  Movimento realístico de projéteis

- Resistência do ar: corridas de bicicleta
- Baseball

Guia de programação

Estruture o programa (use subrotinas)

Use nomes descritivos

Use comentários

Sacrifique tudo (ou quase!) por clareza

Faça uma saída clara

Por que estudaor oscilações?

- Pêndulo, massa-mola…
- Movimento de átomos
- Circuitos elétricos
- Órbitas planetárias

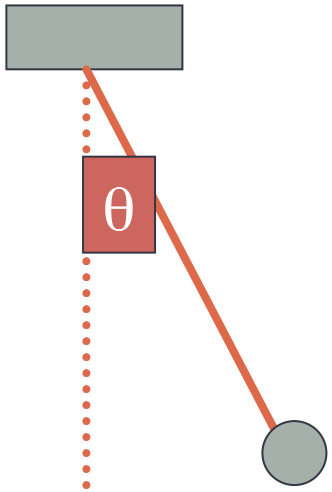
- Tratamento realístico:

Ângulos grandes, força externa, atrito,….

Do mais simples para o mais complicado ...

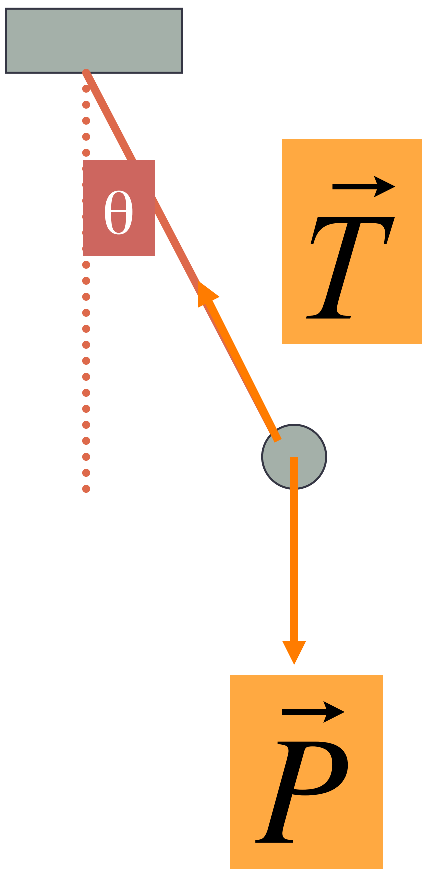
- MHS
- ↓
- Amortecimento
- ↓
- Não linearidade
- ↓
- Caos

Movimento Harmônico Simples

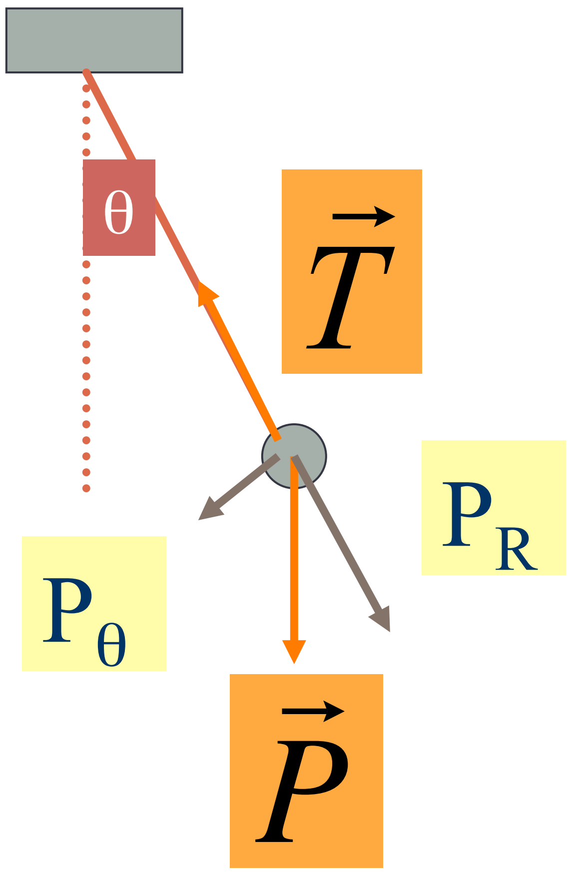


Pêndulo simples

Movimento Harmônico Simples



Movimento Harmônico Simples



Decompondo

$P_R = T$ → $\Sigma F_R = 0$

$P_\theta = -mg\,\mathrm{sen}(\theta)$ → $\Sigma F_\theta = P_\theta$

$$P_\theta = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

Mas $s = l\theta$

$$P_\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Tomando θ pequeno $\quad \text{sen}(\theta) \approx \theta$

$$P_\theta = -mg\,\text{sen}(\theta) \approx -mg\theta$$

$$P_\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

1 equação diferencial ordinária homogênea de 2ª ordem

Solução conhecida

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

Onde $\Omega^2 = g/l$

θ_0 e φ ⇨ condições iniciais

Também podemos calcular:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = -\Omega\,\theta_0 sen(\Omega t + \varphi)$$

Método de Euler

Notas de aula da Érica Polycarpo/Sandra Amato:

- Método de Euler
- Método de Runge-Kutta

http://www.if.ufrj.br/~sandra/MetComp/2009-1/doc/capitulo7.pdf

Capítulo 7:
Resolução numérica de Equações diferenciais

- http://www.if.ufrj.br/~sandra/MetComp/2009-1/doc/Aula10.pdf

Aula 10

RESUMINDO

- Conhecemos: $\frac{dy}{dt}$ e $y\ (t=0)$

Aproximamos: $$y(t+\Delta t) \cong y(t) + \frac{dy}{dt}\Delta t$$

Discretizamos o tempo

$$y(t_i+\Delta t) \cong y(t_i) + \frac{dy(t_i)}{dt}\Delta t$$

Erro no Método de Euler

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{d^3y}{dt^3}\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \ldots$$

Erro em cada passo $\sim (\Delta t)^2$

$T_{final} = \tau$

$N = \tau/\Delta t$

erro ao final $\sim N(\Delta t)^2 = (\Delta t)$

Como aplicar o Método de Euler?

Temos

1 equação diferencial ordinária homogênea de 2ª ordem

Método de Euler

equações diferenciais de 1ª ordem

Como aplicar o Método de Euler?

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta$$

2 equações de 1ª ordem

Iterando ω

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}$$

$$\omega(t+\Delta t) \cong \omega(t) + \frac{d\omega}{dt}\Delta t = \omega(t) - \frac{g\theta(t)}{l}\Delta t$$

$$\omega_{i+\Delta t} = \omega_i - (g/l)\theta_i \Delta t$$

Iterando θ

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}$$

$$\theta(t+\Delta t) \cong \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}\Delta t = \theta(t) + \omega(t)\Delta t$$

$$\theta_{i+\Delta t} = \theta_i + \omega_i \Delta t$$

O programa

Inicializa → $\omega_0 = \ldots$ e $\theta_0 = \ldots$

Itera (até $n\Delta t$)

$$\omega_{i+\Delta t} = \omega_i - (g/l)\theta_i \Delta t$$

$$\theta_{i+\Delta t} = \theta_i + \omega_i \Delta t$$

Imprime → Print, write ...

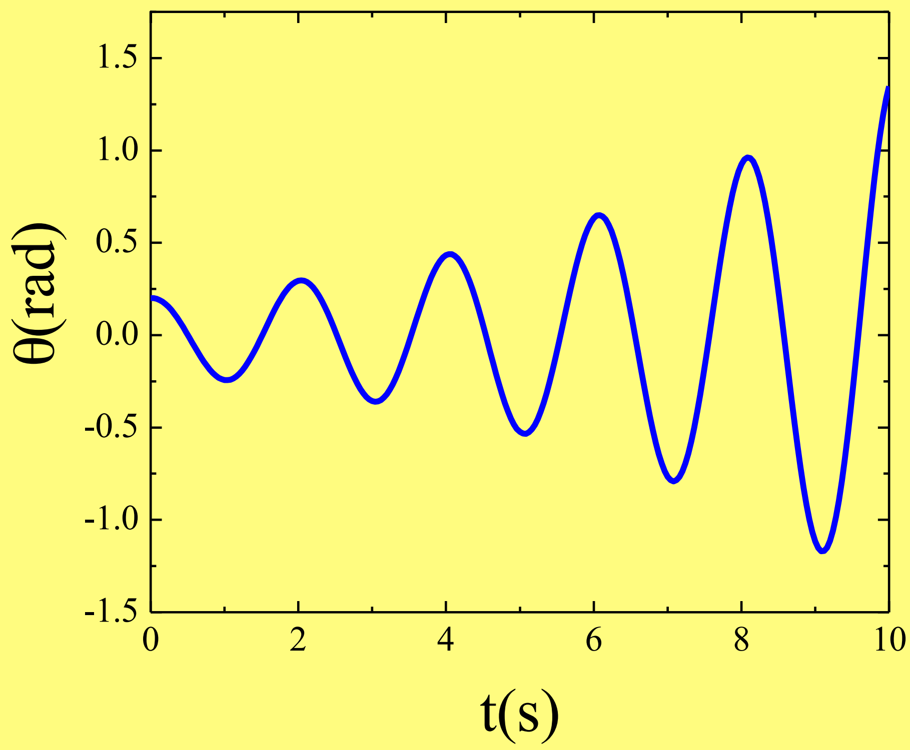
Rodando o programa

$l = 1\text{m} \quad g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$

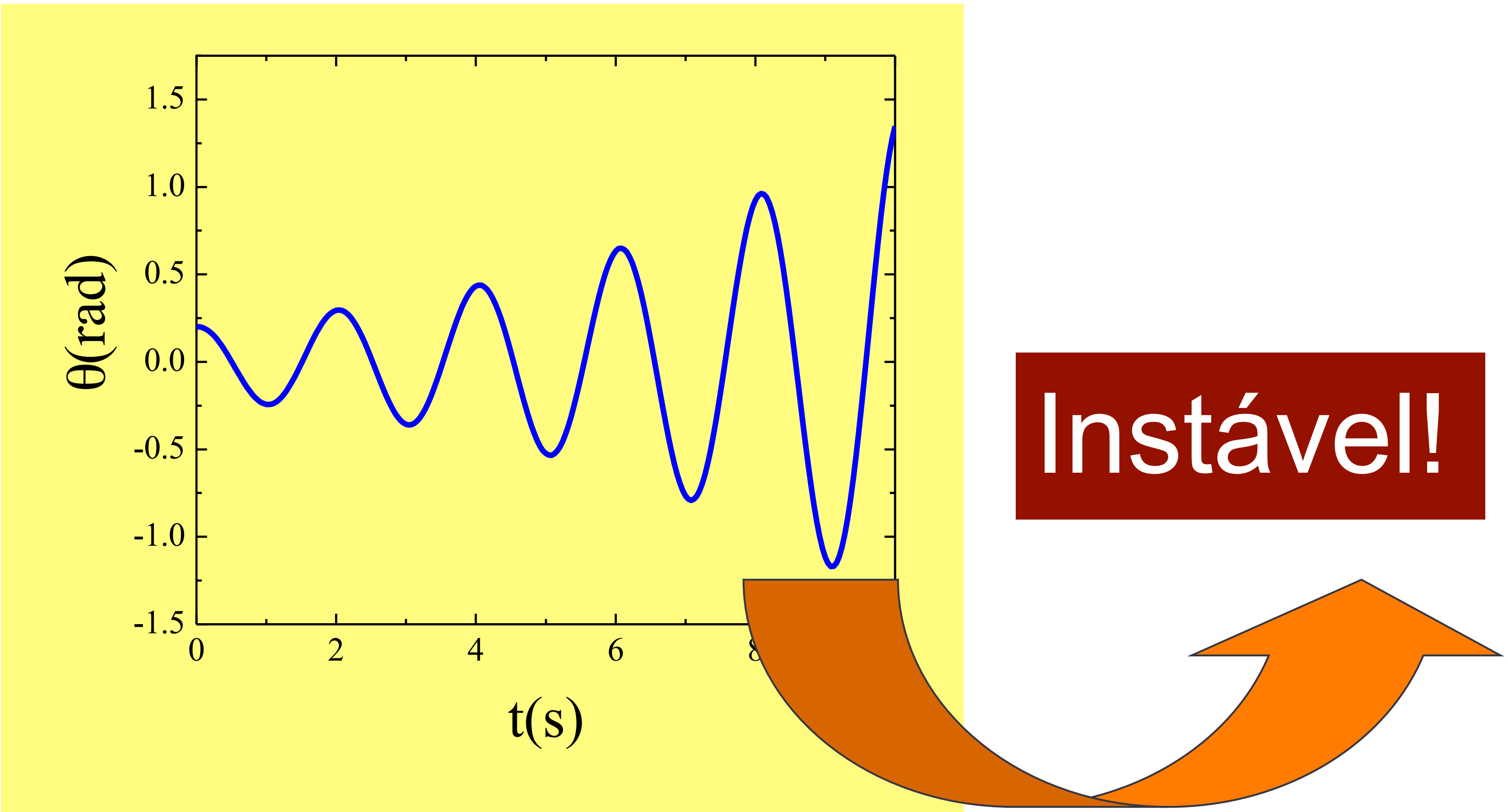
$\omega_0 = 0 \quad \theta_0 = 0{,}2\ \text{rad}$

$\Delta t = 0{,}04\ \text{s}$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2s$$



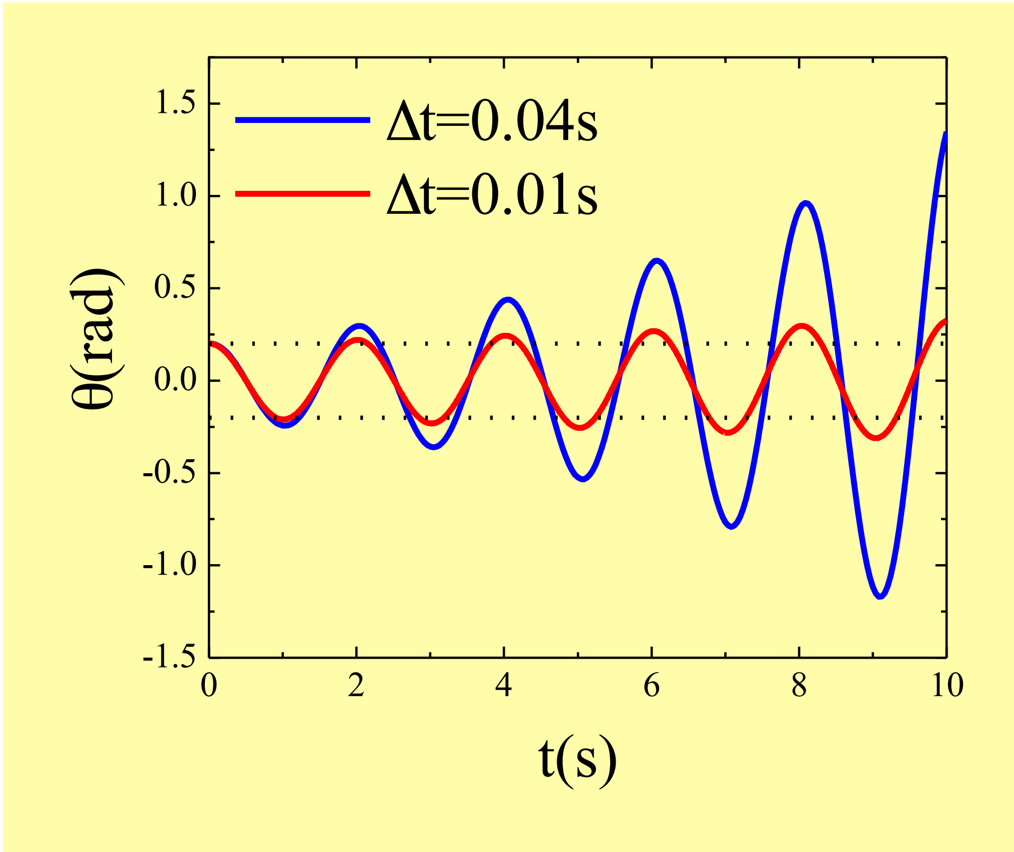
Rodando o programa



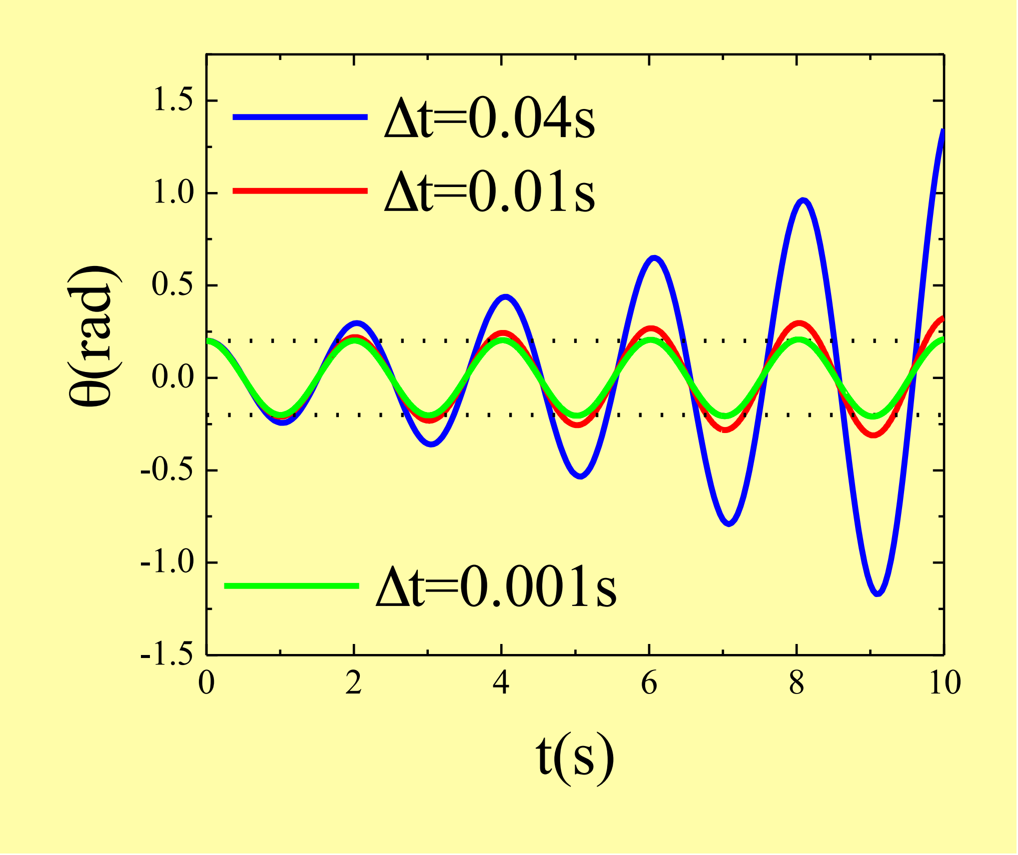
Instável!

Diminuindo Δt

Melhora,
mas não
resolve!



Diminuindo Δt ainda mais ...



Por quê?

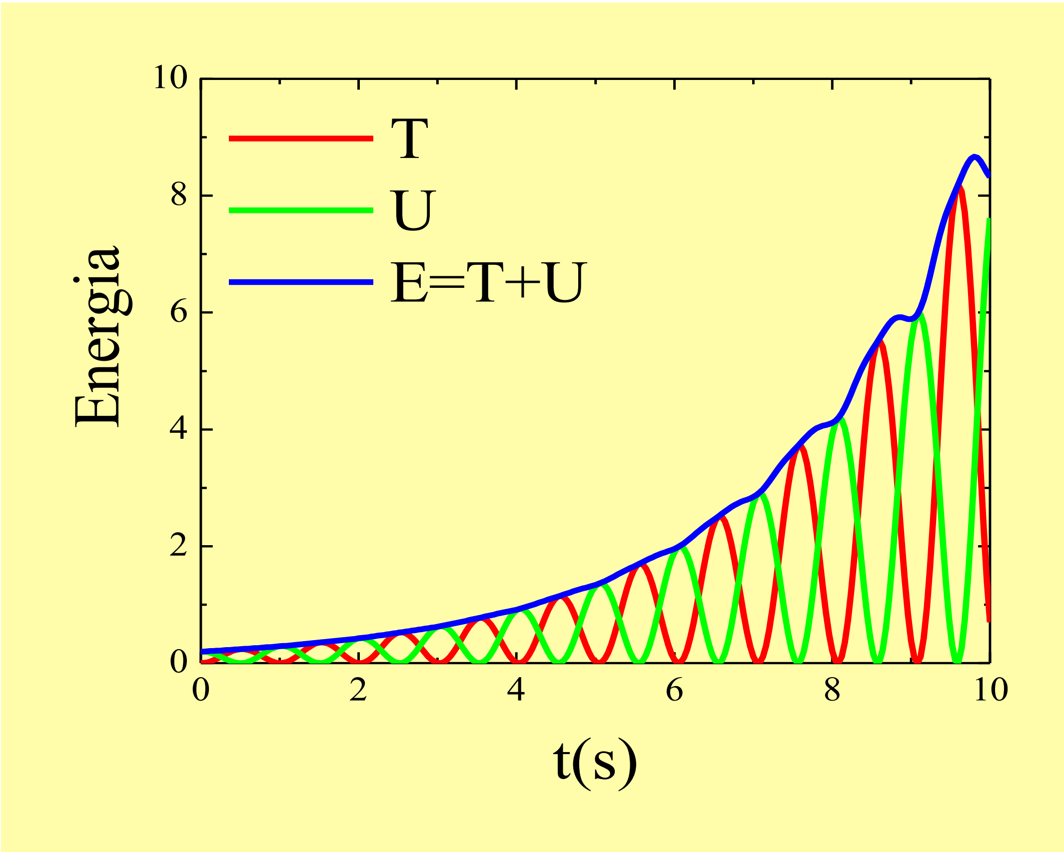
Análise da energia

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2$$

$$U = mgl(1 - \cos\theta)$$

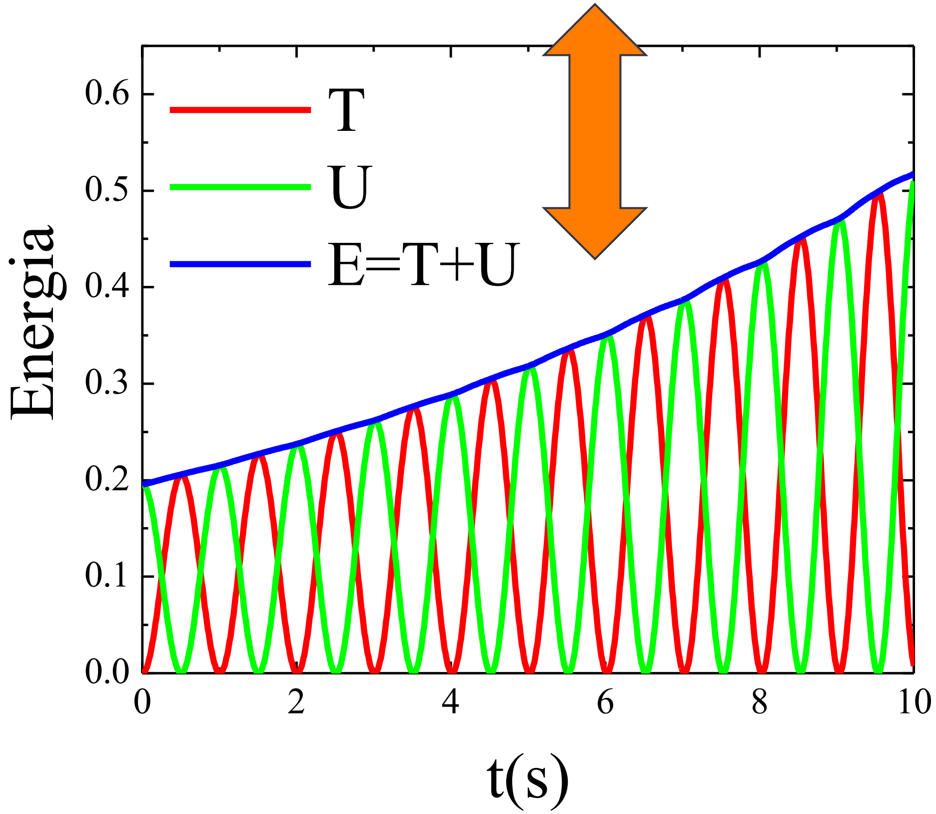
E=T+U

Fazendo Δt=0.04s

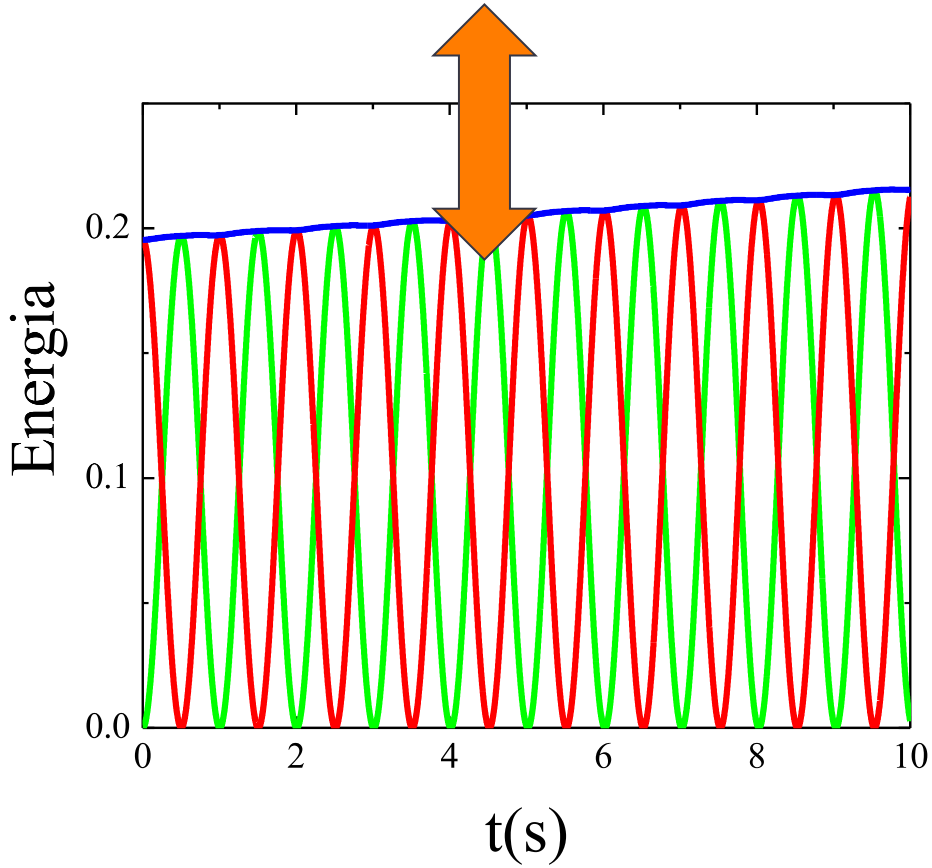


E(t) aumenta com o tempo!

Δt=0.01s



Δt=0.001s



A energia aumenta com t para qualquer valor não nulo de Δt

Instável!

A taxa de acréscimo diminui quando Δt diminui

Não há fonte externa de energia

O Método de Euler não conserva a energia!

☹

Por que?

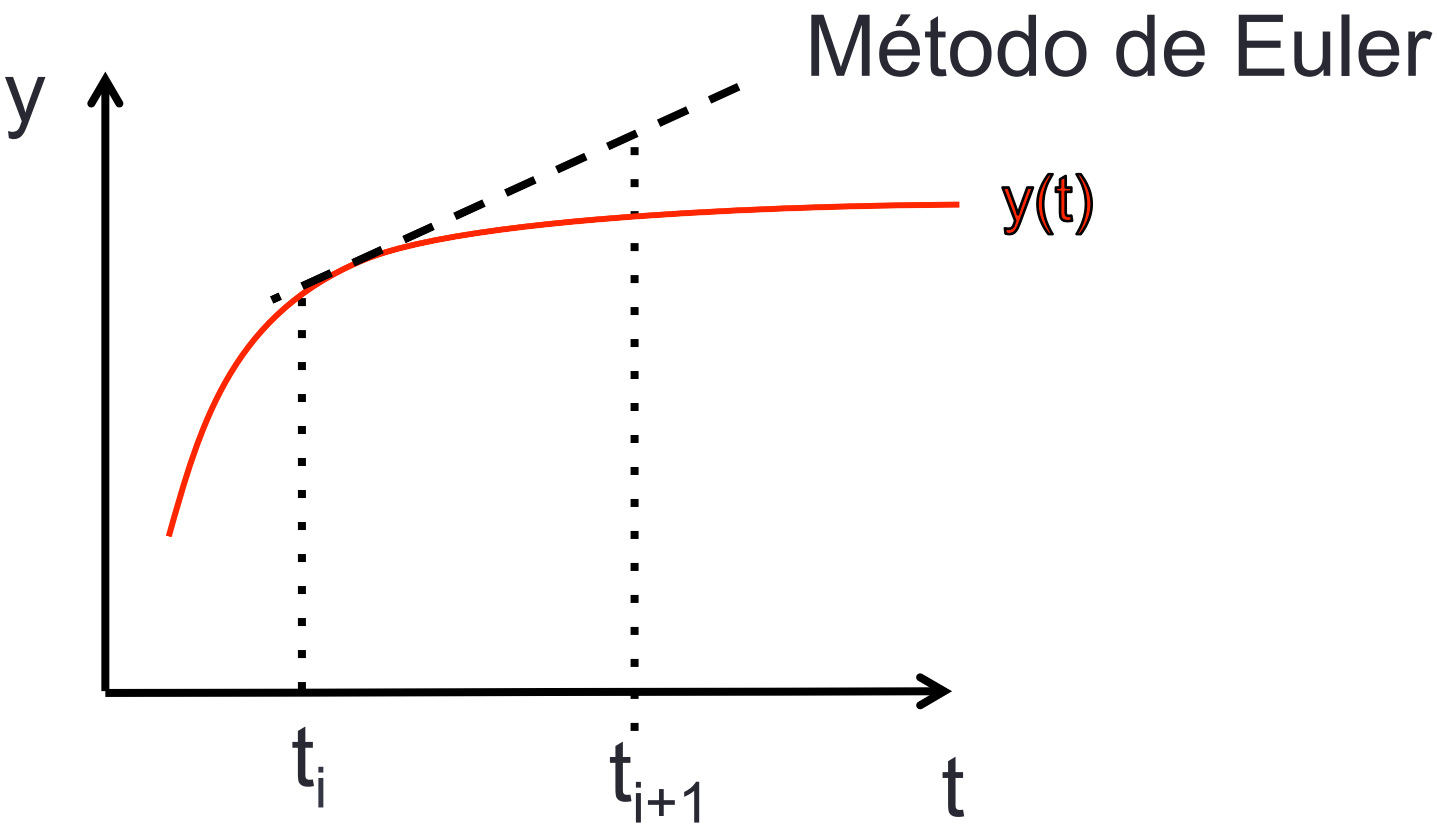
- Teorema:

Existe um valor t_m no intervalo [t,t+Δt] para o qual a solução exata de uma derivada pode ser encontrada com uma expansão até primeira ordem.

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_m} \Delta t$$

O método de Euler toma t_m no início do intervalo

Aproximação do método de Euler



O método de Euler-Cromer

Euler

$$\begin{cases} \omega_{i+\Delta t} = \omega_i - (g/l)\theta_i \Delta t \\ \theta_{i+\Delta t} = \theta_i + \omega_i \Delta t \end{cases}$$

Euler-Cromer

$$\begin{cases} \omega_{i+\Delta t} = \omega_i - (g/l)\theta_i \Delta t \\ \theta_{i+\Delta t} = \theta_i + \omega_{i+\Delta t} \Delta t \end{cases}$$

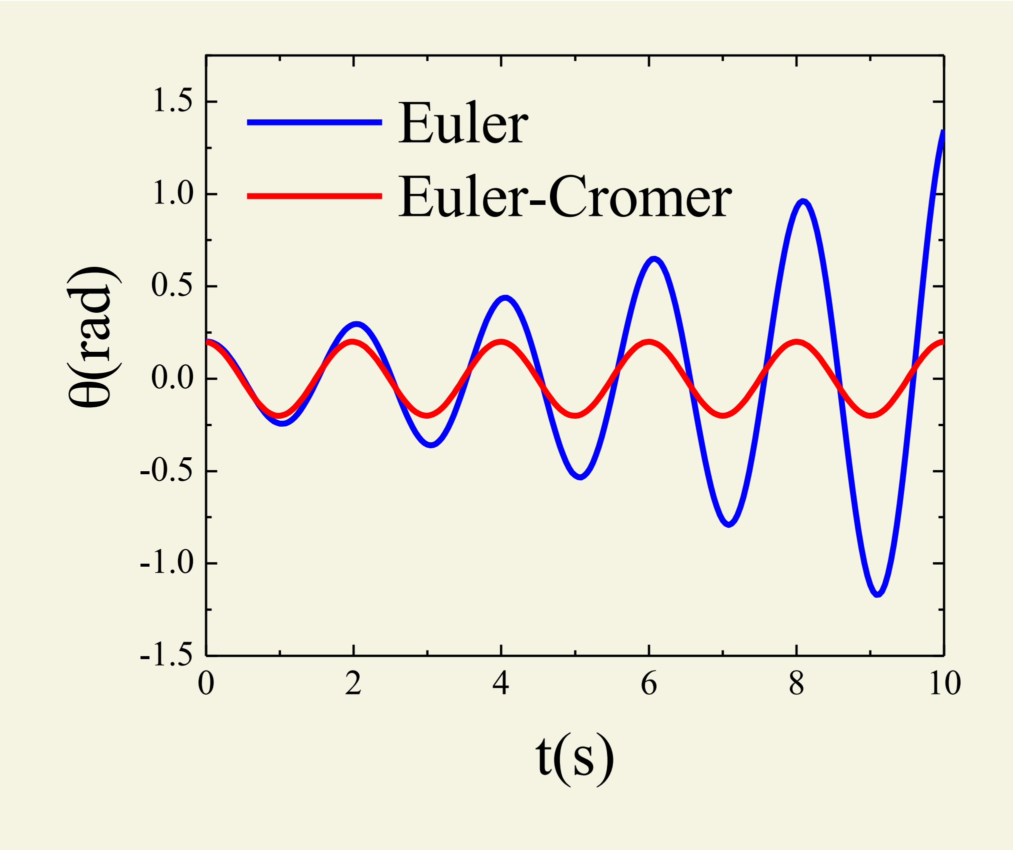
O método de Euler-Cromer

Euler-Cromer

$$\begin{cases} \omega_{i+\Delta t} = \omega_i - (g/l)\theta_i \Delta t \\ \theta_{i+\Delta t} = \theta_i + \omega_{i+\Delta t} \Delta t \end{cases}$$

Única diferença

Fazendo a mudança no programa

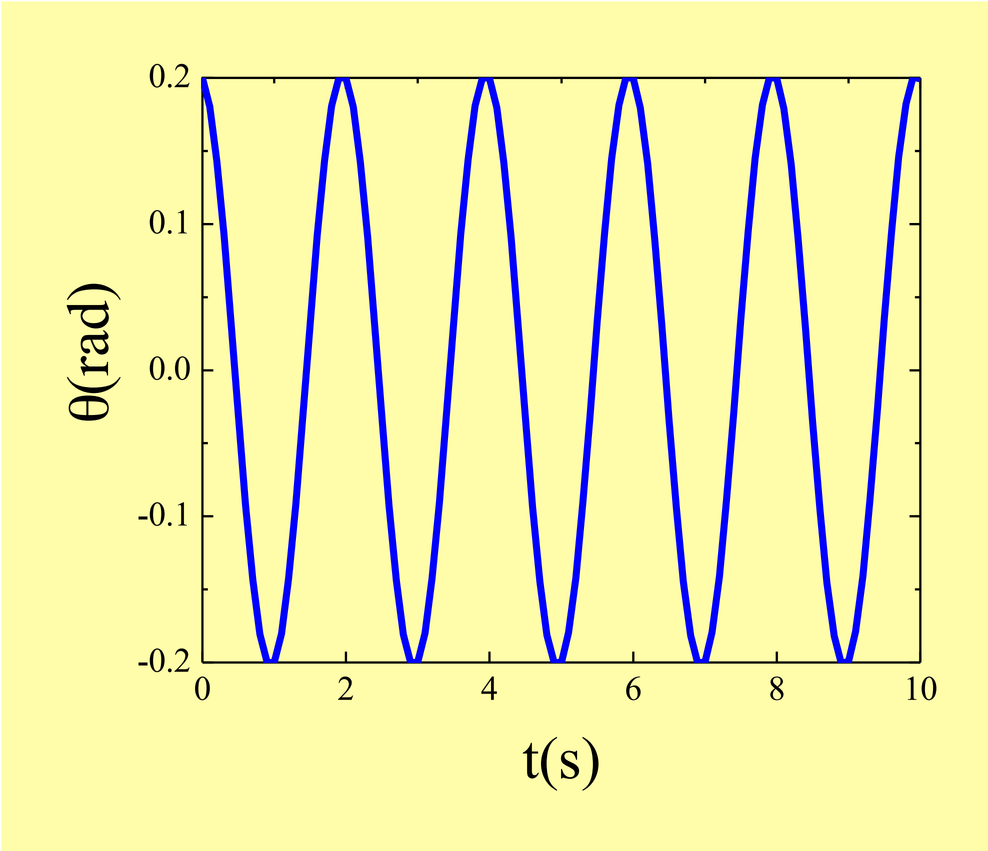


$\omega_0 = 0$

$\theta_0 = 0{,}2$ rad

$\Delta t = 0{,}04$ s

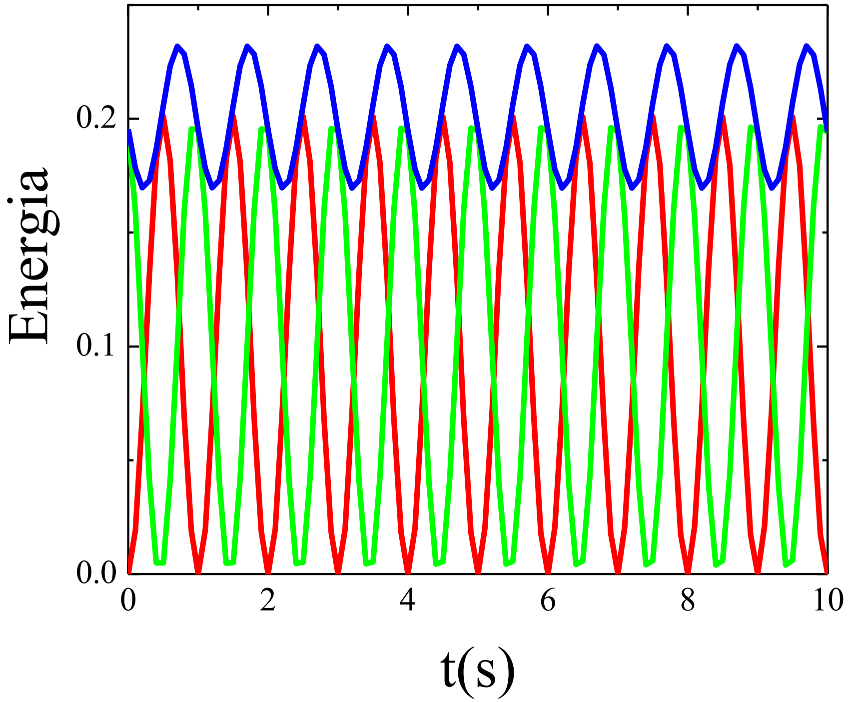
Mesmo aumentando



$\omega_0 = 0$
$\theta_0 = 0,2$ rad

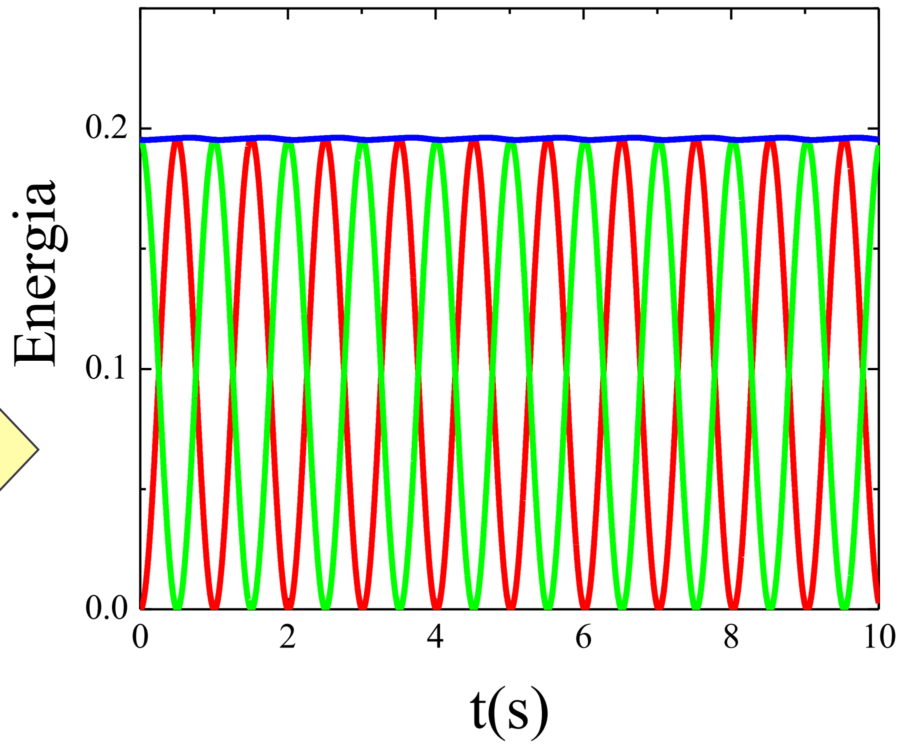
$\Delta t = 0,1$ s

De novo a energia



$\Delta t = 0{,}1$ s

$\Delta t = 0{,}001$ s



Conclusão

O Método de Euler

Decaimento ☺
Oscilação ☹
Crescimento ☹

Euler-Cromer

☺

Parentes próximos do Método de Euler

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{d^3y}{dt^3}\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \ldots$$

Euler

Erro em cada passo $\sim (\Delta t)^2$

$T_{final} = \tau$

$N = \tau / \Delta t$

erro ao final $\sim N(\Delta t)^2 = (\Delta t)$

Diferença centrada ou Leap-frog

$$y(t+\frac{\Delta t}{2}) - y(t-\frac{\Delta t}{2}) = \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{d^3 y}{dt^3}\frac{2(\Delta t)^3}{3!} + \ldots$$

Não aparecem os termos pares

Erro em cada passo ~ $(\Delta t)^3$

erro ao final ~ $(\Delta t)^2$

Diferença centrada ou Leap-frog

Decaimento ☺

Oscilação ☺

Crescimento ☹

Melhorou!

Runge-Kutta

1 passo Euler + 1 passo leap-frog

Acha o centro do intervalo

Faz a derivada no centro do intervalo

Runge-Kutta para o pêndulo simples

1^0 passo

Inicializa θ_0 e ω_0

2^0 passo

Acha o centro do intervalo

$$\theta_{meio} = \theta_i + \omega_i \Delta t/2$$

$$\omega_{meio} = \omega_i - (g/l)\theta_i \Delta t/2$$

Runge-Kutta para o pêndulo simples

3^0 passo

Usa Euler

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{meio}\Delta t$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i - (g/l)\theta_{meio}\Delta t$$

Runge-Kutta

Decimento ☺
Oscilação ☺
Crescimento ☹

Melhorou!

Qual usar?

- Euler
- Euler-Cromer
- Leap-frog
- Runge-Kutta
- Outros…

?

Não sabemos a priori…

Referências

- **Computational Physics**
- N. J. Giordano e H. Nakanishi

Notas de aula da Érica Polycarpo e Sandra Amato

Numerical Recipes