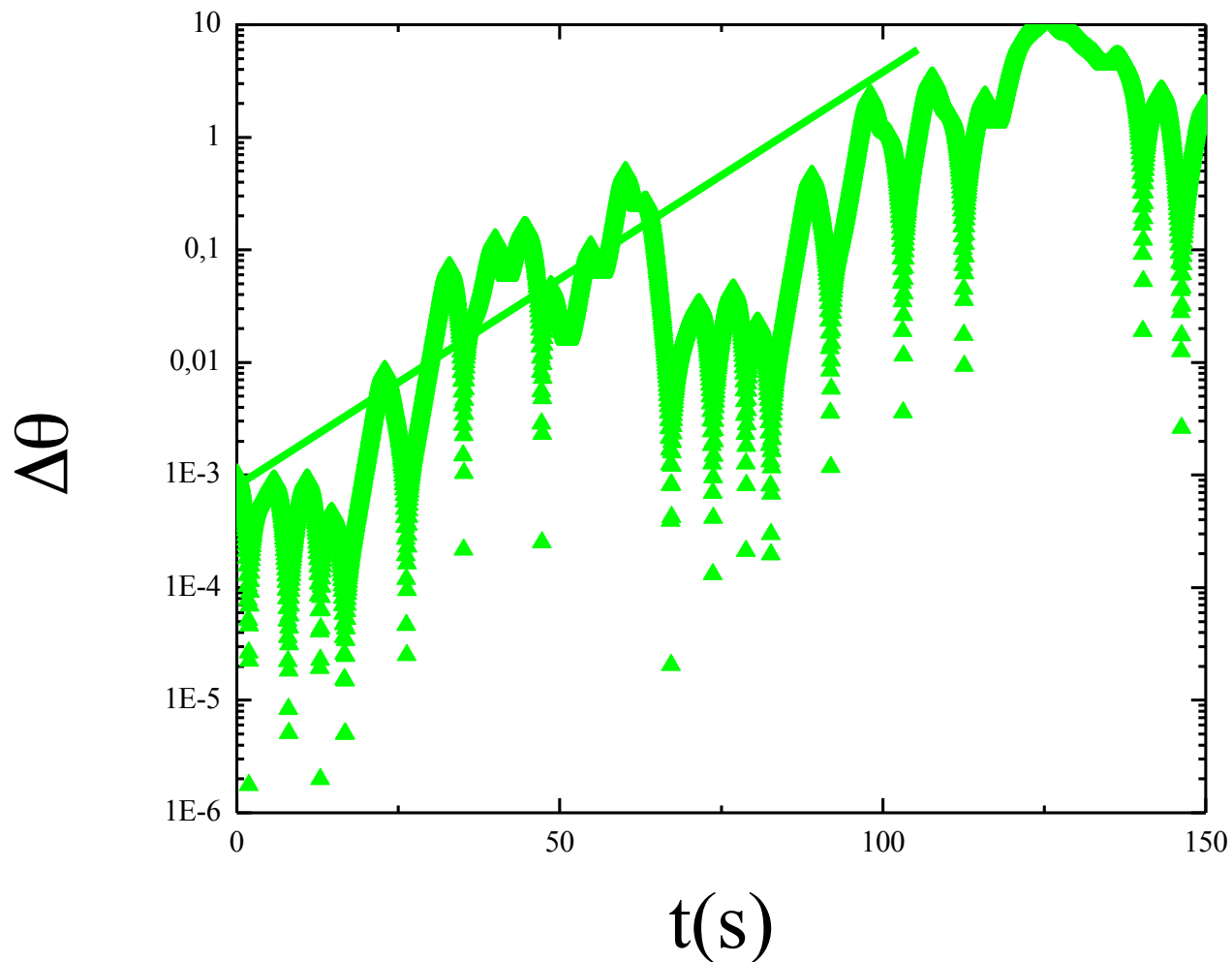


Expoente de Liapunov



$$\alpha = 1.2$$

$$\Delta\theta(t=0) = 0.001$$

$$\Delta\theta \sim e^{\lambda t}$$
$$\lambda > 0$$

Caos



Seção de Poincarè

- Para cada $\alpha \Rightarrow \theta(t)$ e $\omega(t)$
- Depois de 300 períodos (transiente vai a zero)
- Até 400 períodos
- Pegar θ para t em fase com a força externa: $\Omega_D t = n\pi$

Seção de Poincaré

$$\theta \times \omega$$

Na lista !

Atratores

Rota para o Caos

Dobramento de período

Como o sistema passa de periódico a caótico?

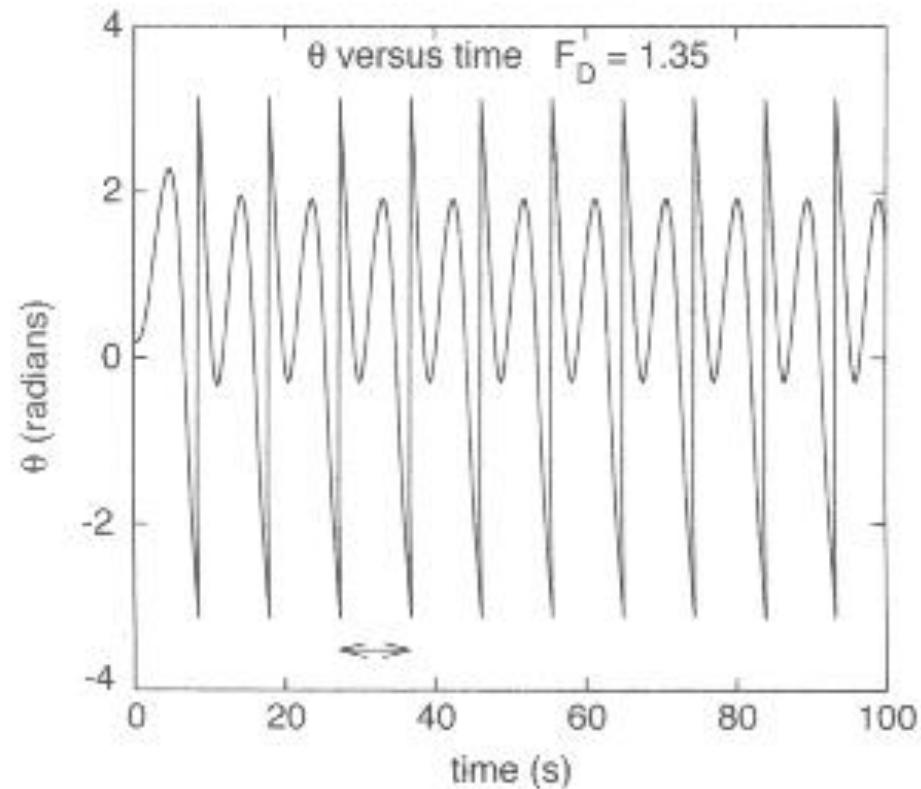
Força externa intensa, vamos manter

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

Vamos analisar o comportamento
depois do transiente

Rota para o Caos

Dobramento de período



Em fase com a força externa

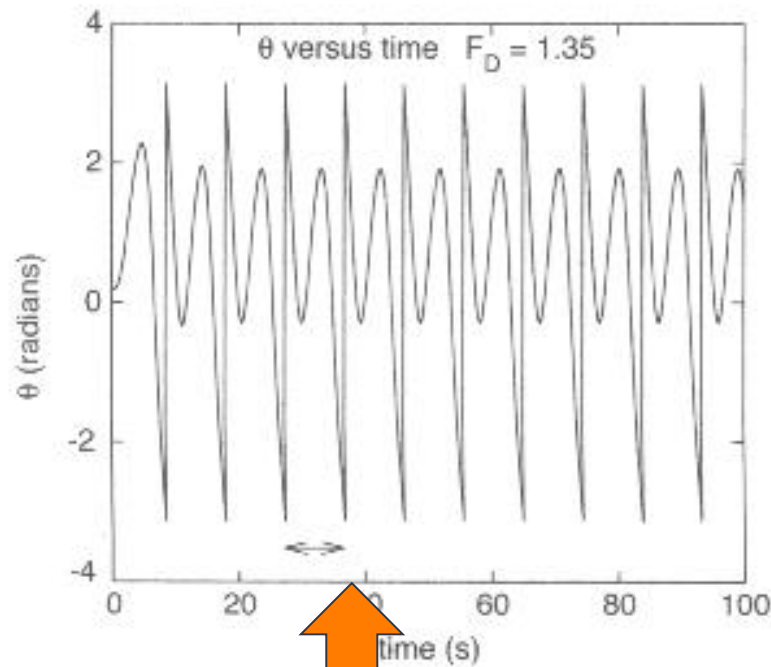
$$F_D = 1.35$$

periódico

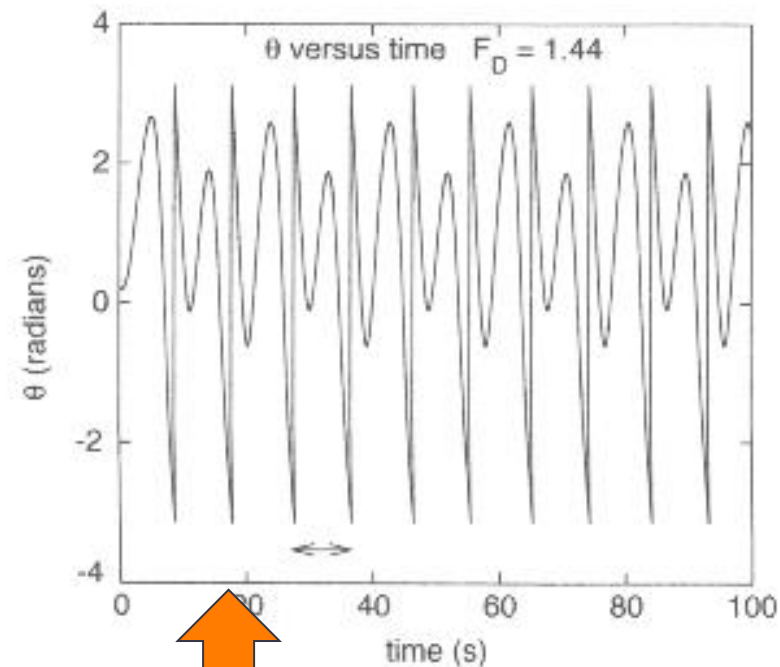
$$\Omega_D = 2/3 \Rightarrow T_D = 2\pi/\Omega_D = 3\pi$$

Dobramento de período

$$F_D = 1.35 \text{ e } F_D = 1.44$$



$$T_D = 3\pi$$



$$T_D' = 2T_D$$

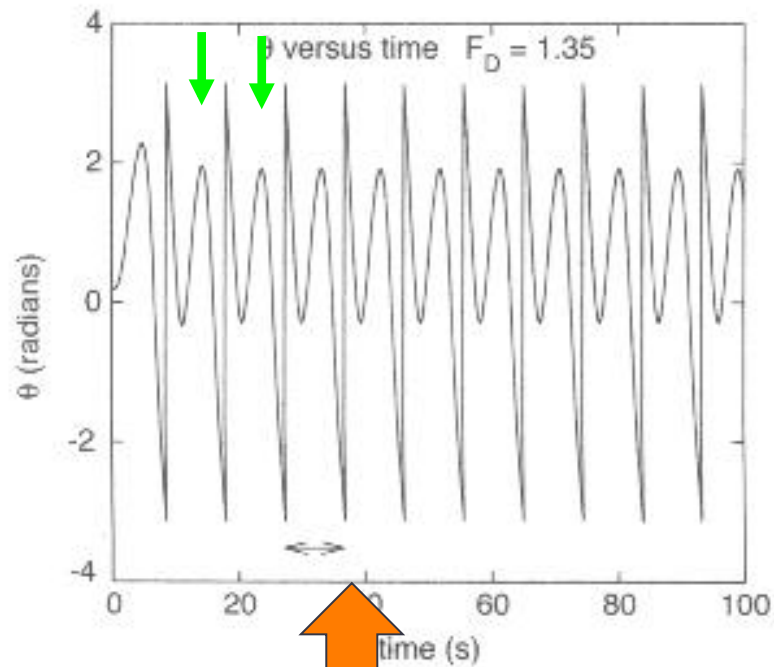
$$\Omega_D = 2/3$$

$$\Omega_D/2$$

Dobramento de período

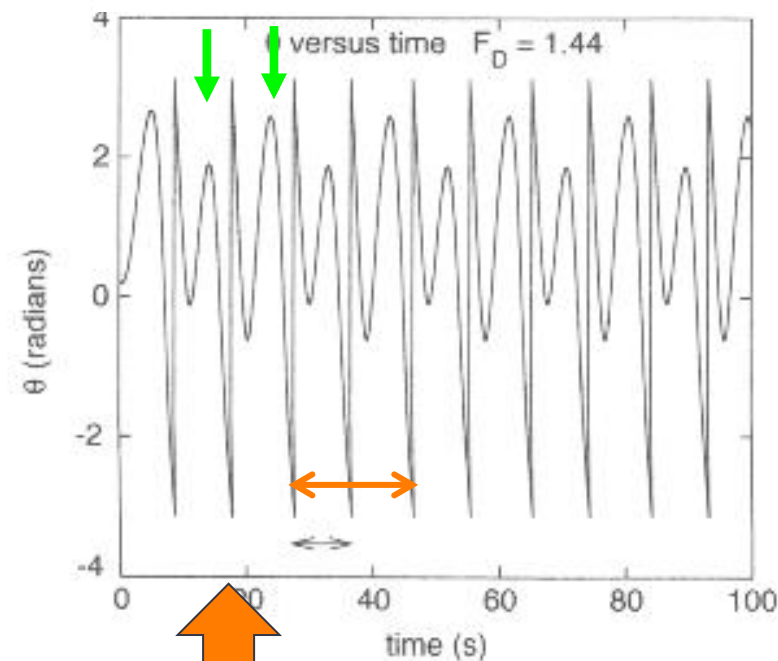
$$F_D = 1.35 \text{ e } F_D = 1.44$$

Mesma amplitude



$$T_D = 3\pi$$

Amplitude diferente



$$T'_D = 2T_D$$

$$\Omega_D = 2/3$$

$$\Omega_D/2$$

Sistema não-linear exposto a uma força externa de frequência Ω_D

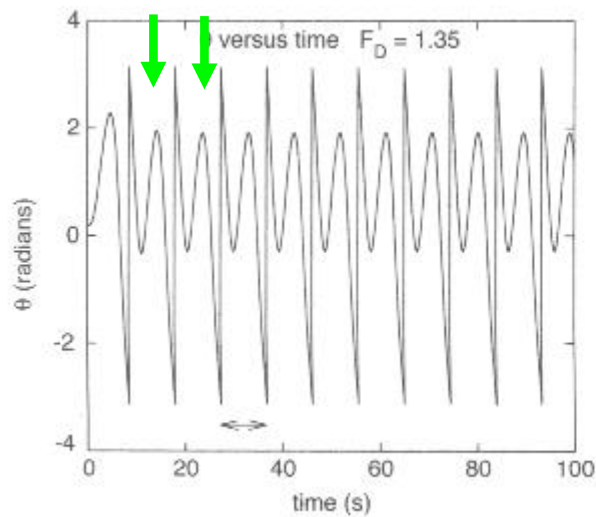
Resposta em $\Omega_D, 2\Omega_D, 3\Omega_D$

Harmônicos de Ω_D : mistura de frequências múltiplas da força externa, com períodos menores do que os da força externa

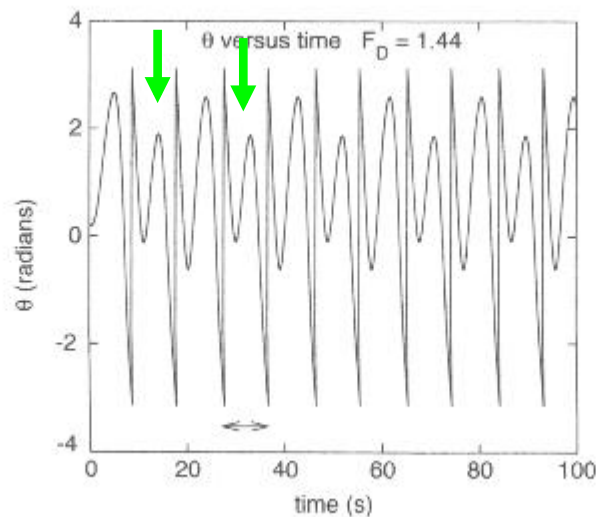
$\Omega_D/2 \rightarrow$ subarmônica!

Dobramento de frequência

$$\Omega_D = 2/3$$

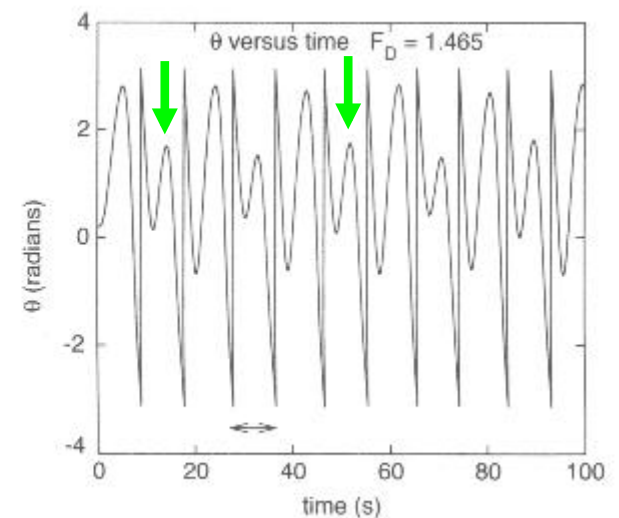


$$T_D$$



$$2T_D$$

$$\theta \approx 1.9 \text{ e } \theta \approx 2.6$$



$$4T_D$$

$$\theta \approx 1.69, 2.82, 1.52 \text{ e } 2.72$$



À medida que F_D aumenta o período dobra

Cascata de dobramento de períodos:
diagrama de bifurcações

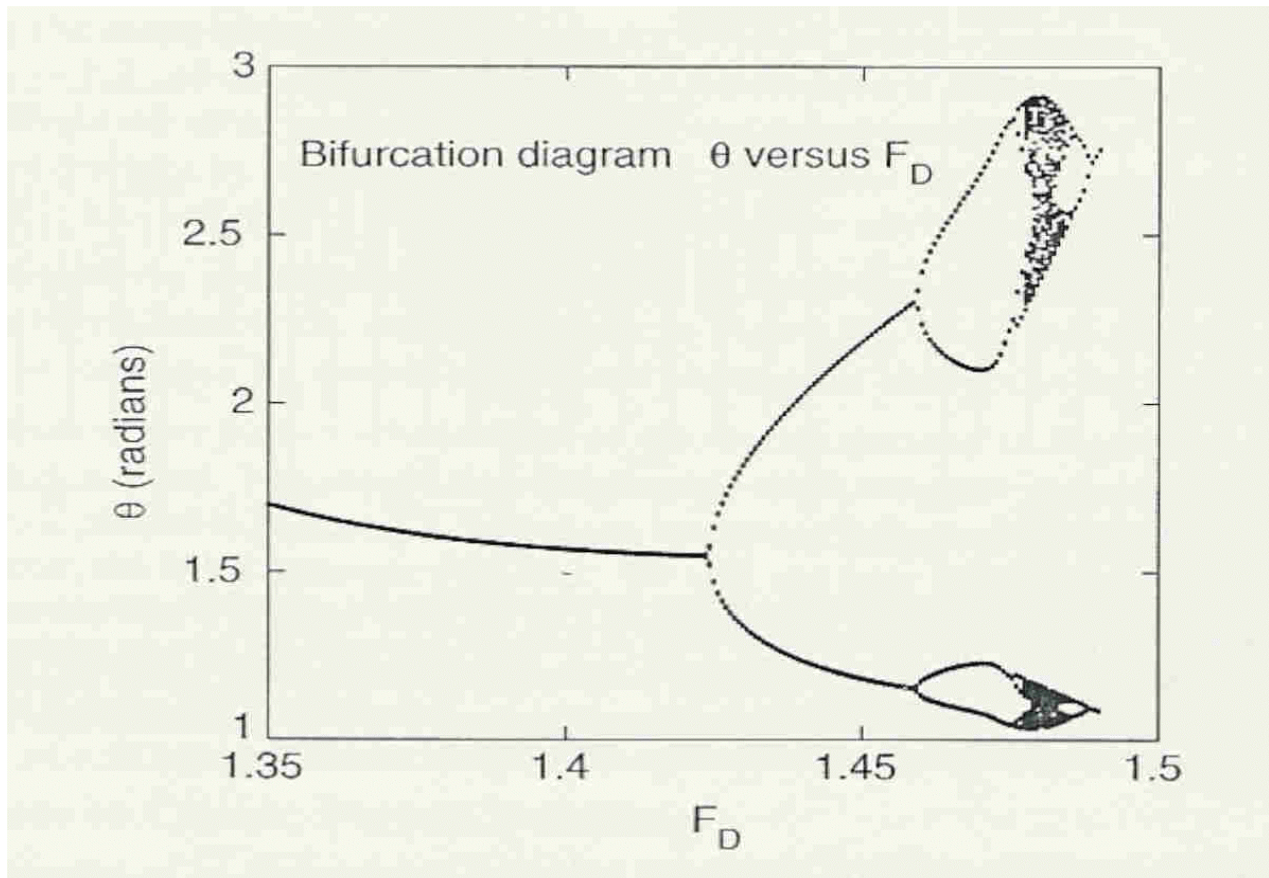
Como ocorre a transição para o caos?

Bifurcação

- Para cada α (F_D) calcula-se $\theta(t)$
- Depois de 300 períodos (transiente vai a zero)
- Até 400 períodos
- Pegar θ para t em fase com a força externa: $\Omega_D t = n\pi$

Bifurcação

$$\theta \times \alpha$$



Dobramento de frequência

A rota de entrada em caos por dobramento de frequência é específica do pêndulo, ou este é um fenômeno universal?

Bifurcação

No diagrama de bifurcação podemos ver que o espaçamento entre transições de dobramento de período diminui com a ordem da transição

- Período 2 – F_D de 1.424 até 1.459
- Período 4 – F_D de 1.459 até 1.476

Vamos introduzir um parâmetro para quantificar este “encolhimento” δ_n

Bifurcação

$$\theta \times \alpha$$

- F_n valor de F para o qual ocorre a transição para o período 2^n

$$\delta_n \equiv \frac{F_n - F_{n-1}}{F_{n+1} - F_n}$$

- $\delta_n > 1$
- $n \rightarrow \infty \delta_n \approx 4.669\dots$

COMPORTAMENTO UNIVERSAL

Outros sistemas

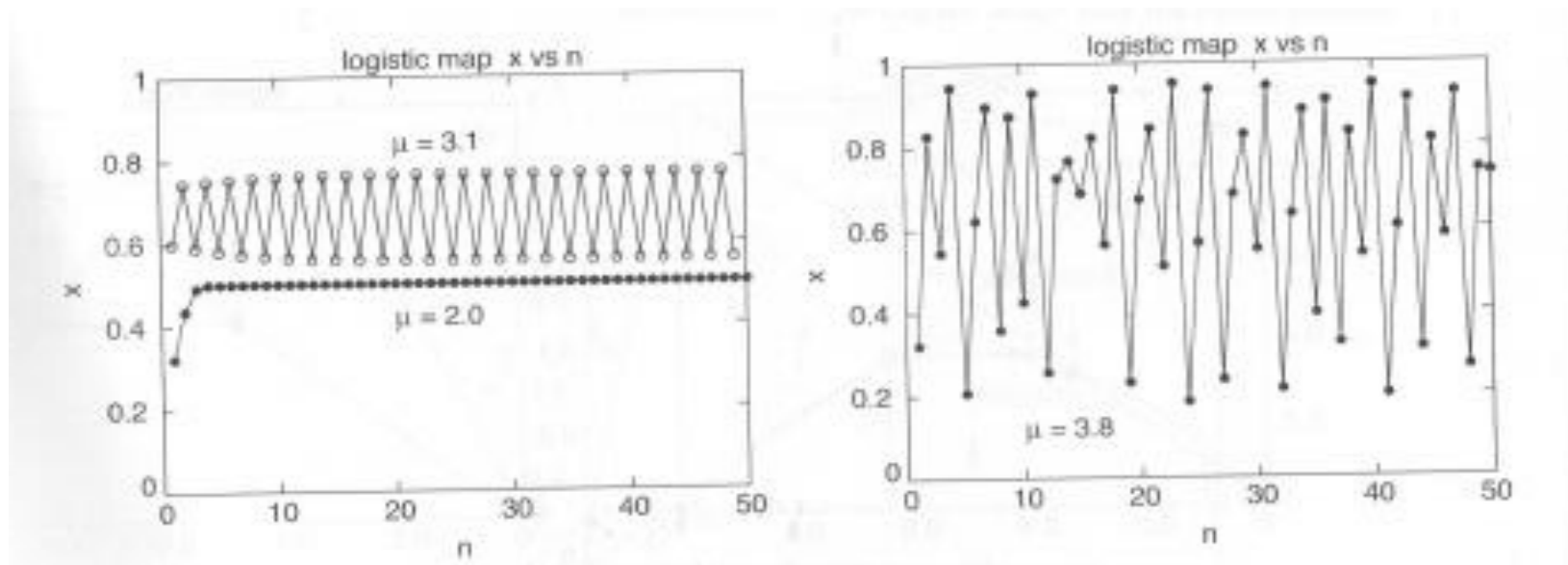
- Vimos que o pêndulo forçado, não-linear e amortecido pode apresentar comportamento caótico.
- Outros sistemas também podem? O que é necessário?

Mapa Logístico

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

- x_n é o tamanho de uma população na geração n
- μ é um parâmetro que controla a quantidade de comida disponível, controla a taxa de crescimento da população
- “Equação de Movimento” → mapa discreto

Mapa logístico



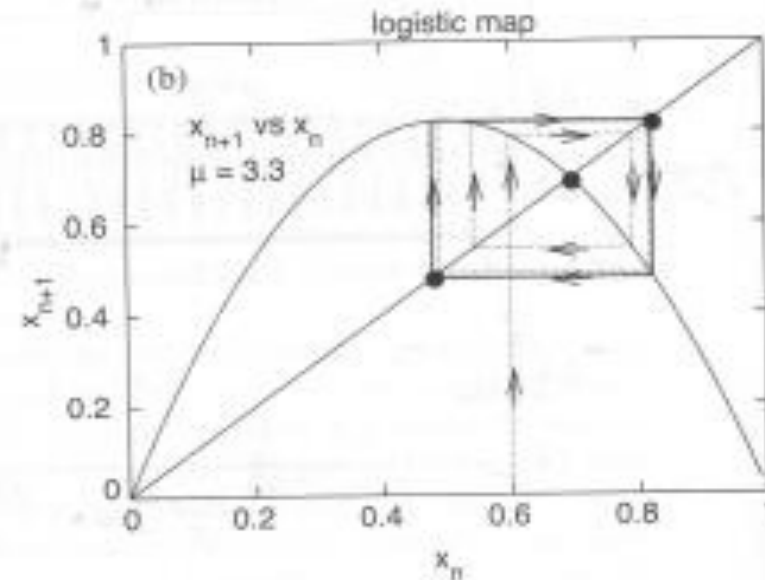
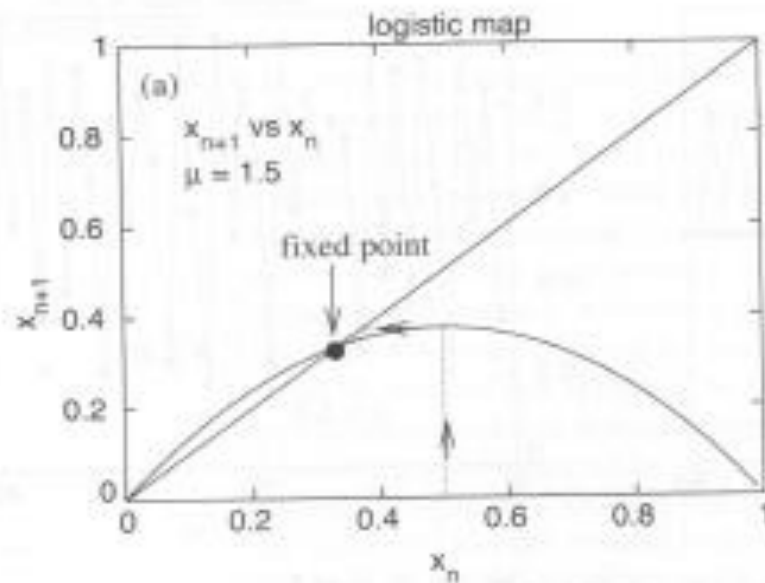
Para $\mu=2.0$ período simples,
Para $\mu=3.1$ dobramento de período,
Para $\mu=3.8$ CAOS

Como uma função tão simples quanto

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

Consegue dar origem a movimento caótico?

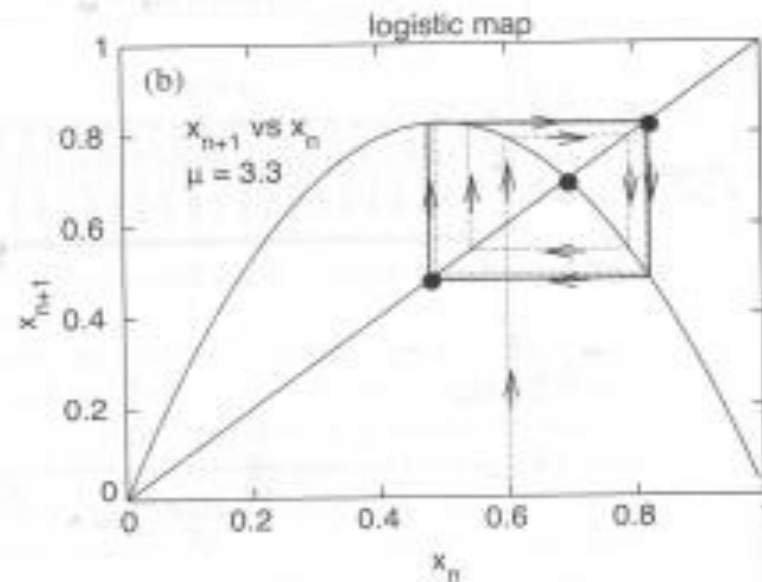
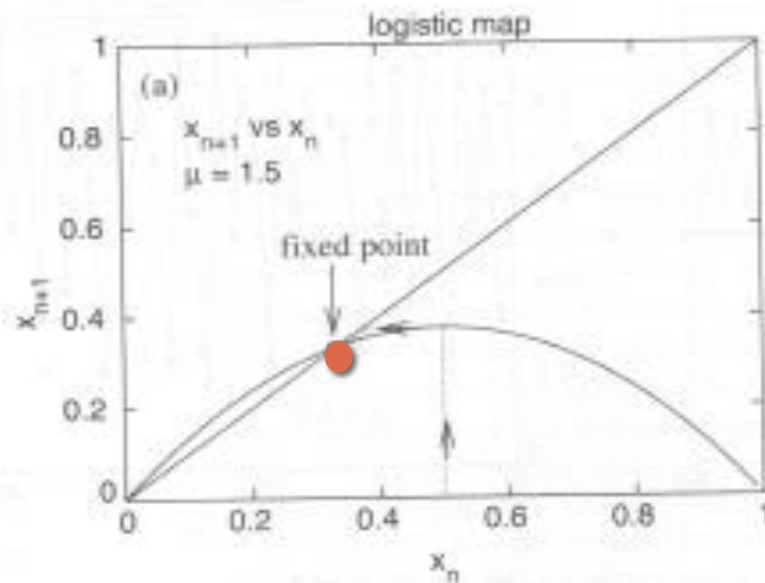
Pontos fixos



$$f(x) = \mu x_n (1 - x_n)$$

$$x^* = f(x^*)$$

Pequenos valores de μ

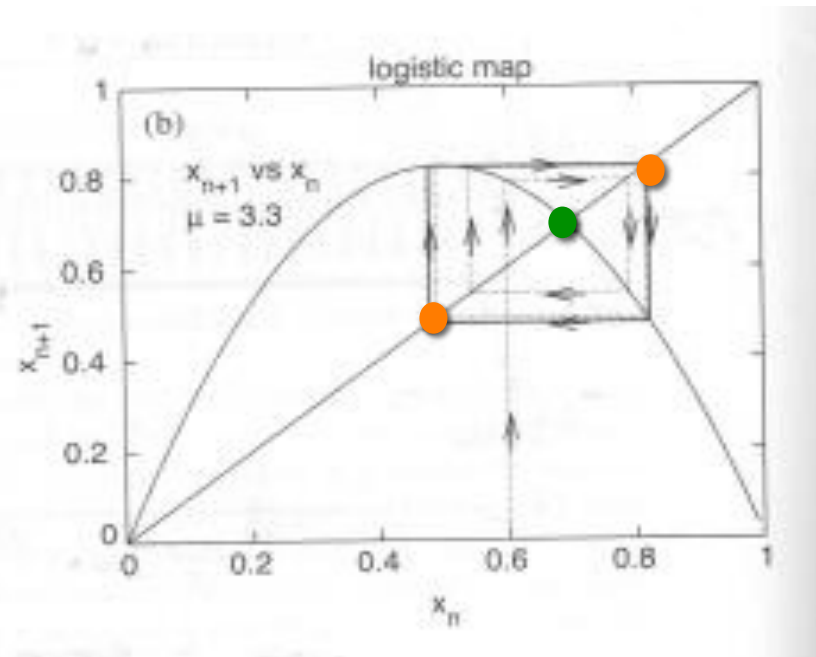
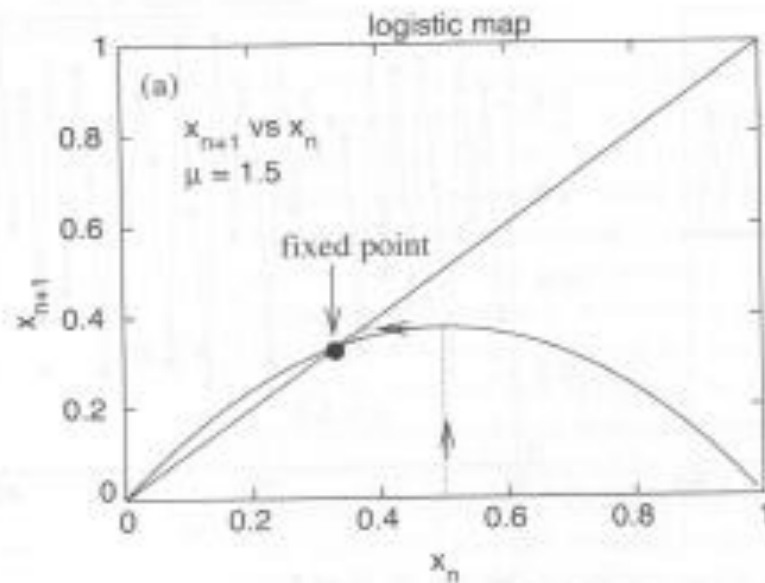


Para $\mu = 1.5$

1 ponto fixo

$$x^* = f(x^*)$$

Para μ grande



Ponto fixo instável $x^* \approx 0.70$

Região de período duplo: oscila entre $x^* \approx 0.48$ e $x^* \approx 0.82$

Como funciona o período duplo

Segunda iteração

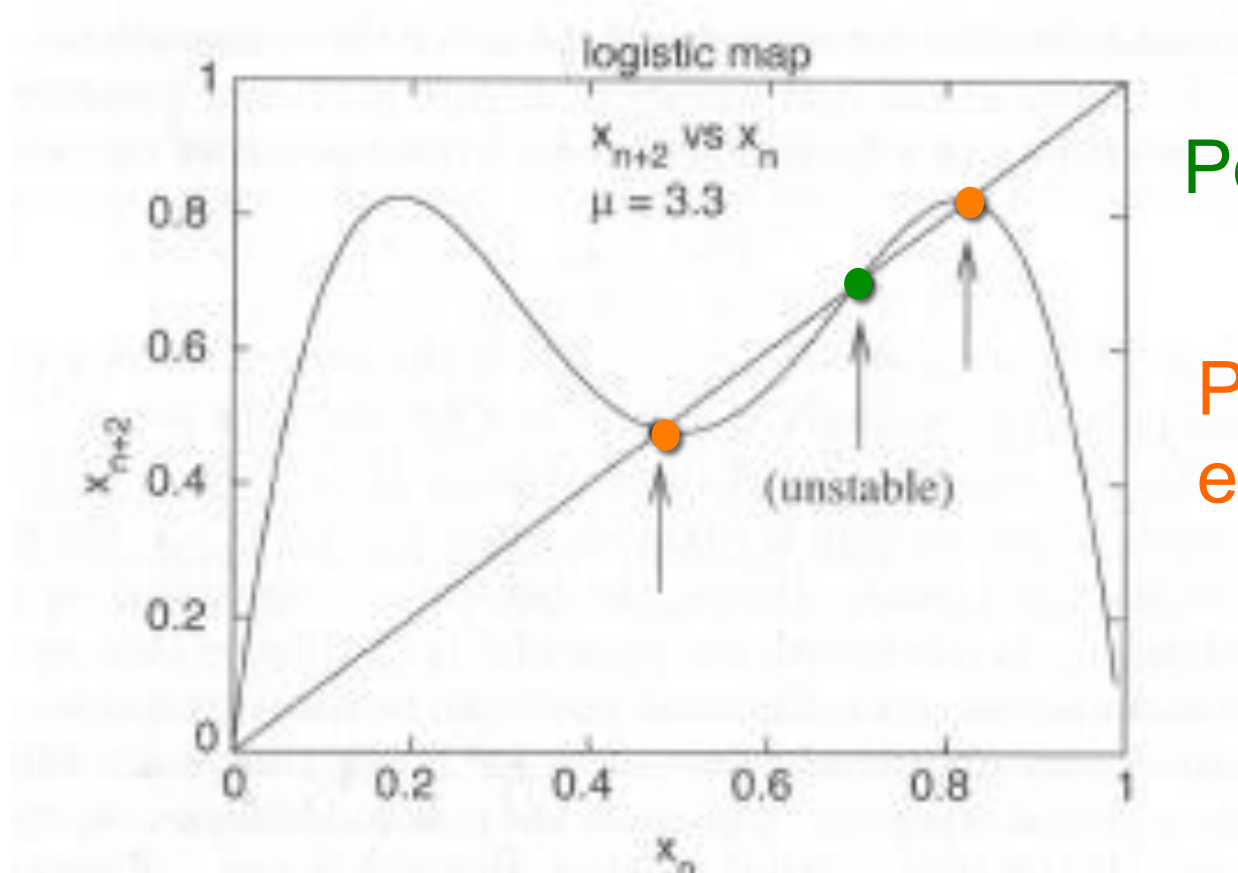
$$f_2(x) = f(f(x))$$

Quando há período duplo

$$x_{n+2} = x_n$$

Podemos encontrar pontos fixos de forma semelhante ao que fizemos antes

Período duplo



Ponto fixo instável

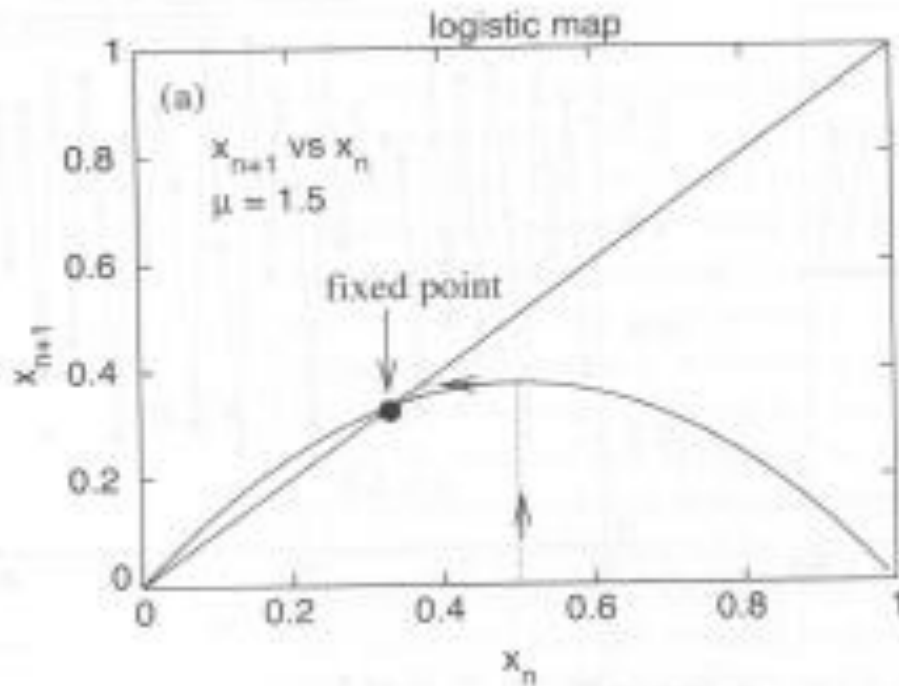
Pontos fixos
estáveis

Outros períodos

Procedimento semelhante para período-4, período-8, ...

Compreensão do dobramento de frequência

Pequenos valores de μ



Próximo a um ponto fixo

$$f(x^* + \delta x) \approx f(x^*) + f'(x^*)\delta x$$

Se começamos próximo do ponto fixo

$$\delta x = x - x^*$$

É pequeno

$$|f'(x)| < 1$$

se aproxima de x^*

$$|f'(x)| > 1$$

se afasta de x^*

Pequenos valores de μ

Magnitude de $|f'(x)|$

depende de μ

Aumento de μ induz a transição

Universalidade

A função logística $f(x)$ é representativa da função mapa de um sistema muito geral

Perto da transição, as funções são suaves e tem a forma geral de $f(x)$

A natureza dos pontos fixos será a mesma para sistemas muito diferentes

As propriedades caóticas de sistemas muito diferentes, como o mapa logístico e o pêndulo não-linear podem ser universais

Referência

- **Computational Physics**

Nicholas J. Giordano