

Potenciais e campos

Métodos computacionais II

Potencial elétrico

- Encontrando o potencial elétrico e o campo elétrico para em uma região do espaço:

- A lei de Gauss nos diz que

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Mas sabemos que

$$E = -\nabla V$$

- E somos levados a equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Para um espaço livre de cargas, ela é conhecida como equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

- Para encontrarmos o potencial elétrico em uma região sem cargas
- Precisamos das condições de contorno
- Equação diferencial parcial
 - Não valem os métodos numéricos usados para Eq. diferenciais ordinárias

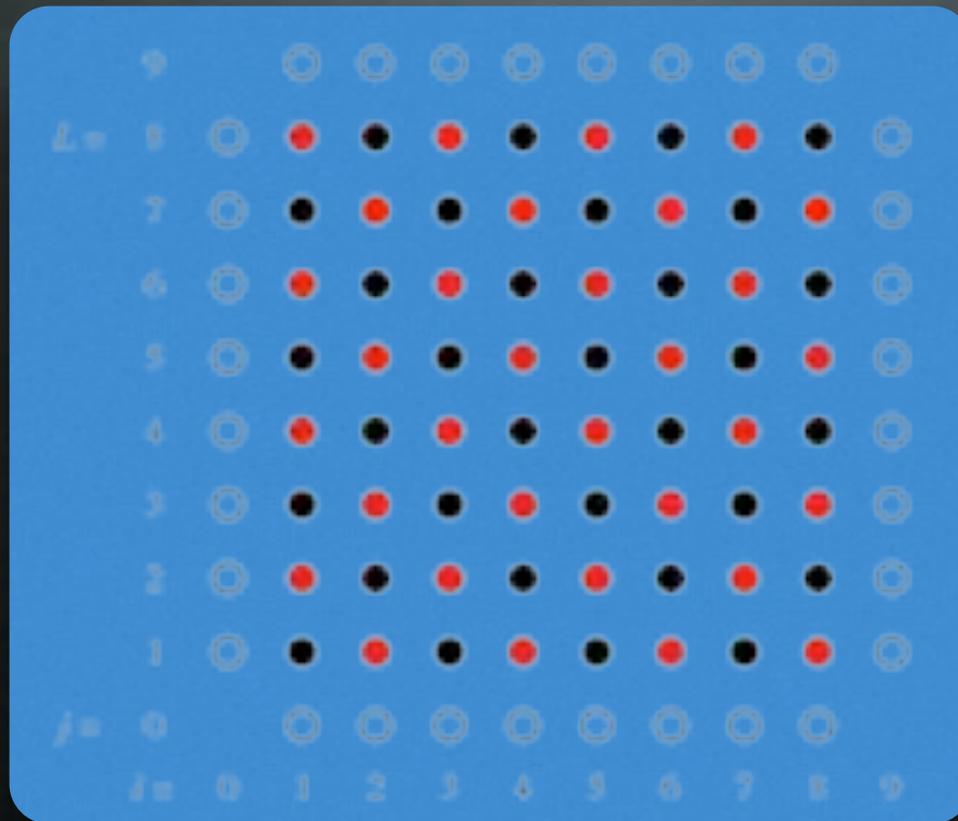
Como proceder?

- Tentaremos discretizar sistema e reduzir nossa equação diferencial parcial a um sistema de equações algébricas.
- Para resolver o sistema de equações acopladas:
 - Método de relaxação

Como resolver?

Discretização:

$$x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z$$



Como resolver?

Discretização: $x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z$

Derivada parcial: $\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V(i+1, j, k) - V(i, j, k)}{\Delta x}$

ou... $\frac{\partial V}{\partial x}(i-1/2) = \frac{V(i, j, k) - V(i-1, j, k)}{\Delta x}$

Usaremos a notação:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(i+1/2) = \frac{V(i+1, j, k) - V(i, j, k)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(i-1/2) = \frac{V(i, j, k) - V(i-1, j, k)}{\Delta x}$$

Como resolver?

então

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial V(i + 1/2)}{\partial x} - \frac{\partial V(i - 1/2)}{\partial x} \right]$$

utilizando as definições dadas

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{V(i + 1, j, k) + V(i - 1, j, k) - 2V(i, j, k)}{\Delta x} \right]$$

Inserimos a expressão acima na eq. de Laplace
(para x,y e z) assumindo que

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z$$

Solução

$$V(i, j) = \frac{1}{6} [V(i-1, j, k) + V(i+1, j, k) + V(i, j-1, k) + V(i, j+1, k) + V(i, j, k-1) + V(i, j, k+1)]$$

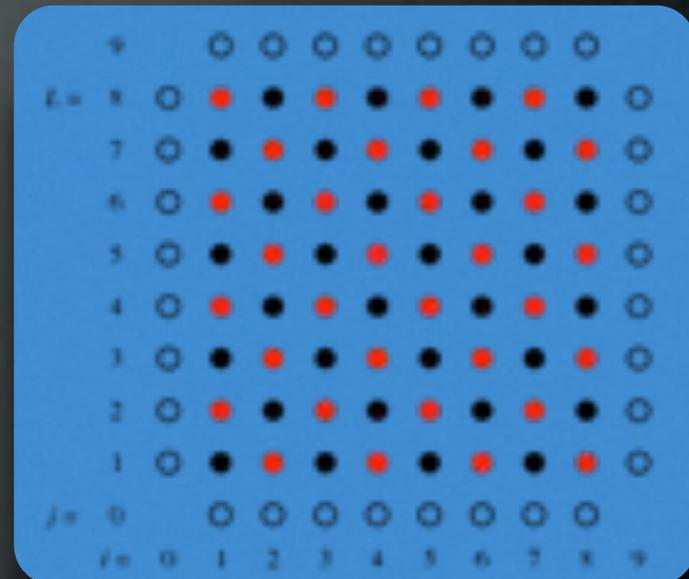
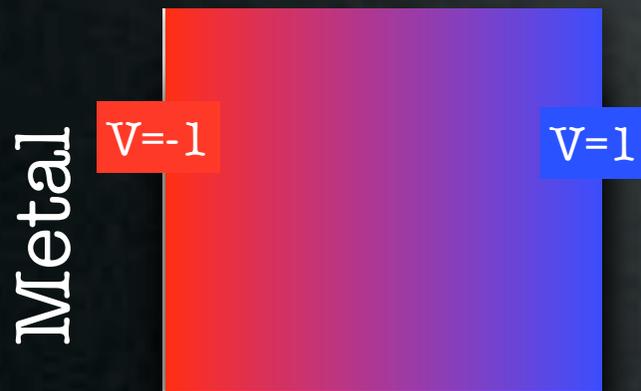
- A solução de $V(i,j,k)$ é uma média de V em todos seus vizinhos
- Essa condição deve ser satisfeita em todos os pontos
- Precisamos de uma estratégia numérica
 - Método de Jacobi
- Condições de contorno

Geometria e condição de contorno

Condições de contorno

- Dirichlet (fixa V)
- von Neumann (fixa derivada de V)

Isolante



Estrutura do programa

- Chama sub-rotina **inicial** que nos dá as condições e contorno e um chute inicial para os valores de $V(i,j)$
- Chama sub-rotina **laplace** que calcula $V(i,j)$ convergente
 - **laplace** chama outra sub-rotina **atualiza** que a cada passo atualiza o valor de $V(i,j)$ e a variação dV em relação ao passo anterior
 - **laplace** para de chamar **atualiza** quando dV é muito pequeno, ou seja, houve convergência

Sub-rotina **atualiza**

- dV é a variação total de V durante a atualização
- inicialmente, $dV=0$
- loop por todos os pontos (i,j) , excluindo a fronteira:
 - $V_{novo}(i,j) = \frac{1}{4} [V(i-1,j) + V(i+1,j) + V(i,j-1) + V(i,j+1)]$
 - adicionar $|V_{novo}(i,j) - V(i,j)|$ a dV
- retornar o valor de $V_{novo}(i,j)$ e dV

Sub-rotina `laplace`

- Inicia com um valor $V(i,j)$ dado.
 - ➔ Do chute inicial ou do passo anterior
- Chama `atualiza` para utilizar $V(i,j)$ para computar um chute melhorado $V_{\text{novo}}(i,j)$
- Chama `atualiza` novamente para armazenar $V_{\text{novo}}(i,j)$ na matriz $V(i,j)$
- Checa se dV é pequeno o suficiente. Se for, sai da sub-rotina

Campo elétrico

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_x(i, j) = -\frac{V(i+1, j) - V(i-1, j)}{2\Delta x}$$

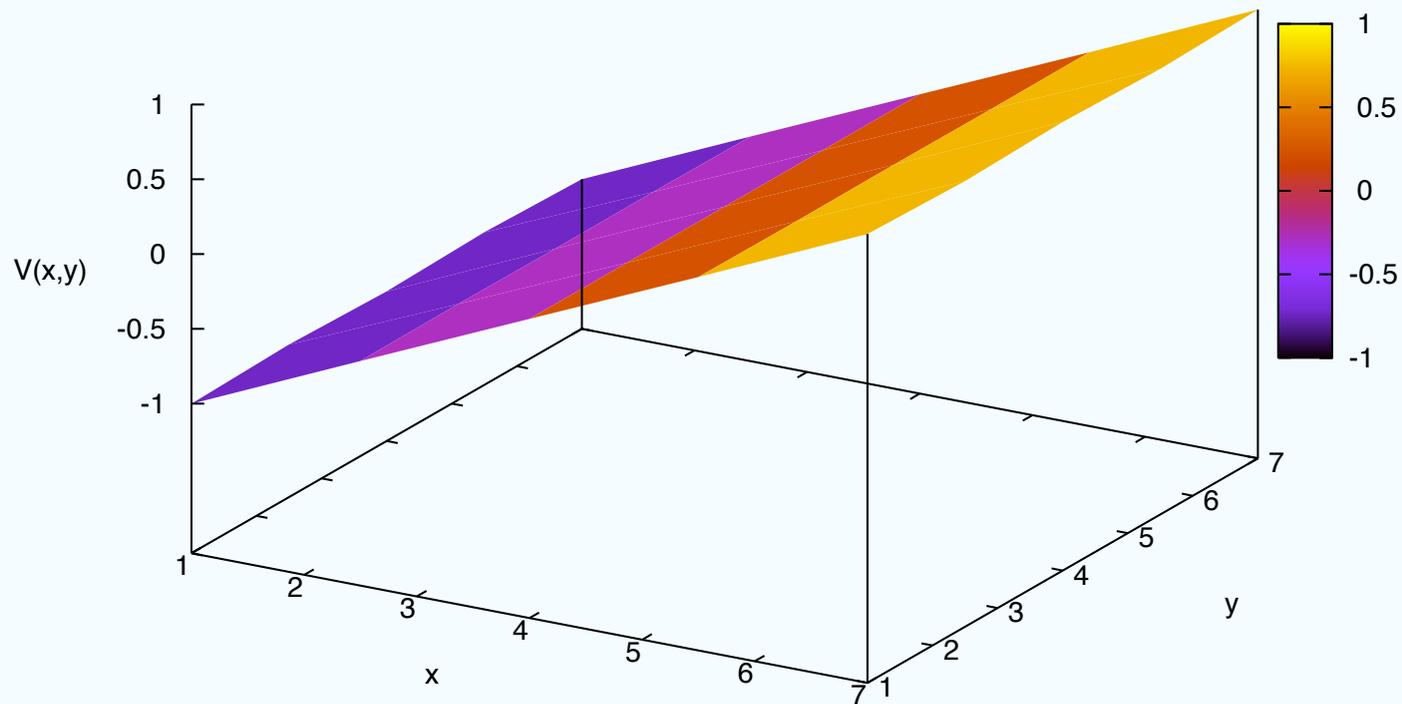
$$E_y(i, j) = -\frac{V(i, j+1) - V(i, j-1)}{2\Delta x}$$

Resultados

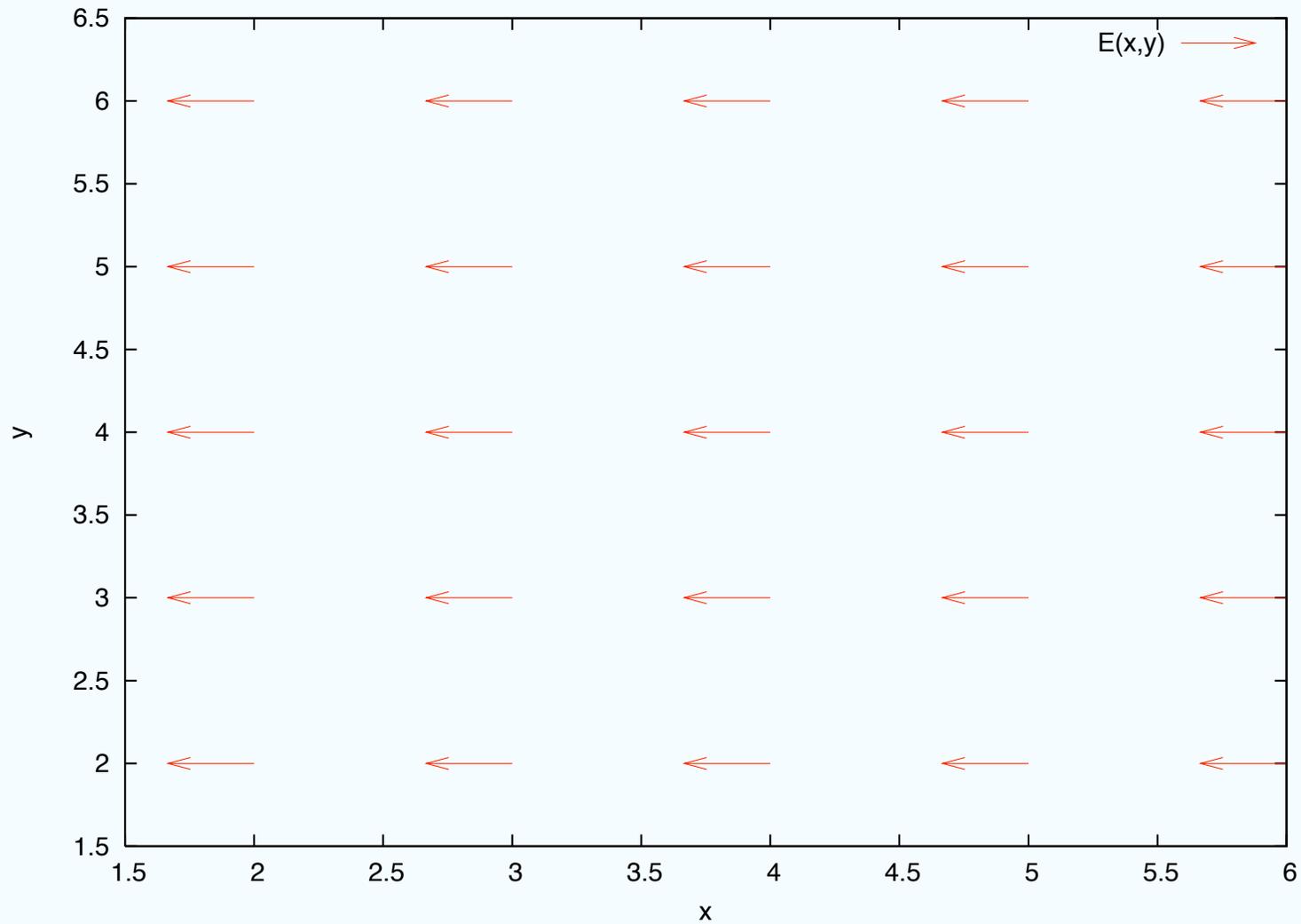
- Gnuplot é muito bom para gráficos vetoriais e 3D
- ver scripts no blog



Potencial elétrico

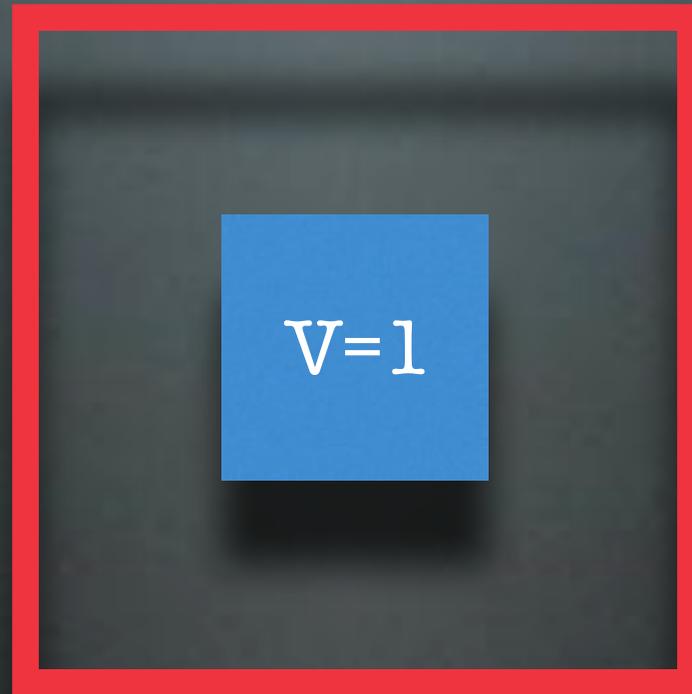


Campo elétrico



Outra condição de contorno

$$V=0$$

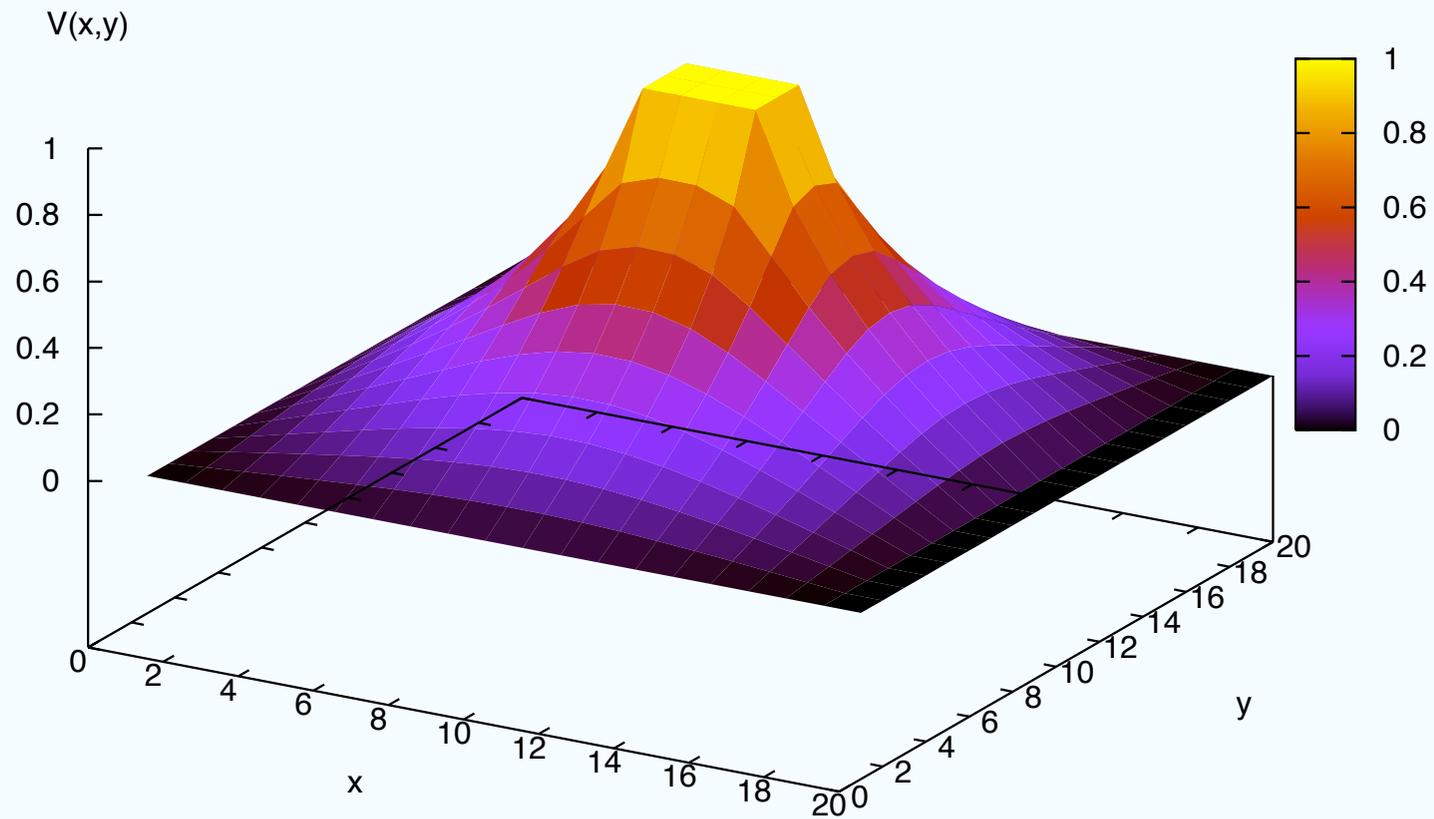


$$V=1$$

Metais

Mudar condições de contorno e **atualiza**

Potencial elétrico



Campo elétrico

