

Fractais

Métodos computacionais II
2015-2

O que é um fractal?

- Mandelbrot:

- Uma forma geométrica complexa que pode ser sub-dividida em partes onde cada parte é a cópia reduzida do todo.

- Matemática:

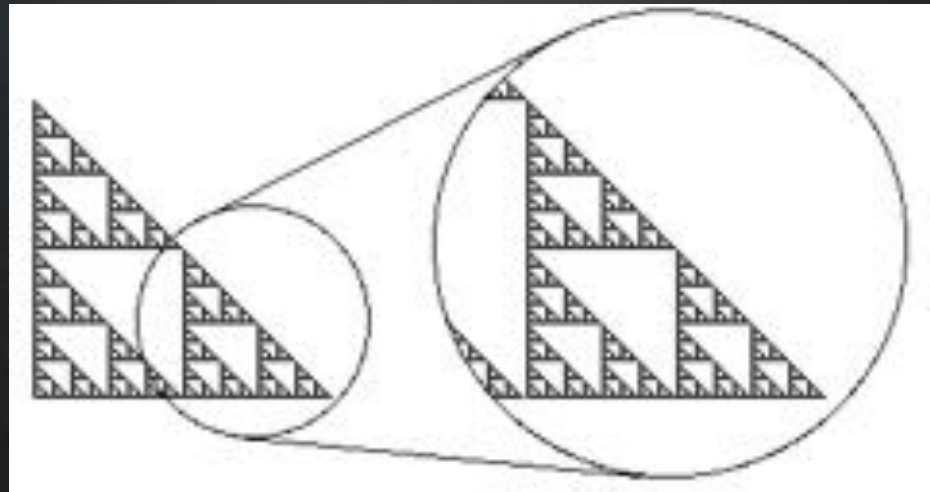
- Conjunto de pontos cuja dimensão fractal excede a dimensão topológica.

Auto-similaridade

- Os fractais regulares mais simples são construídos por iteração:

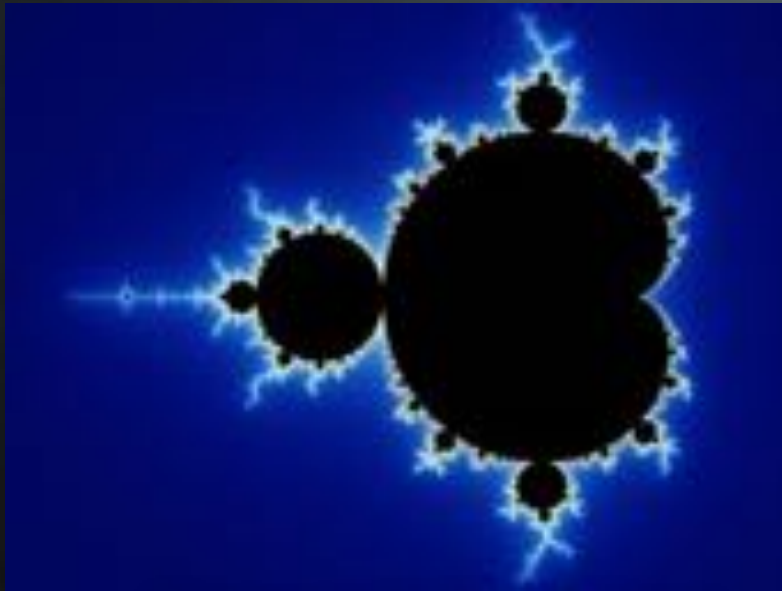


O triângulo de Sierpinski é auto-similar

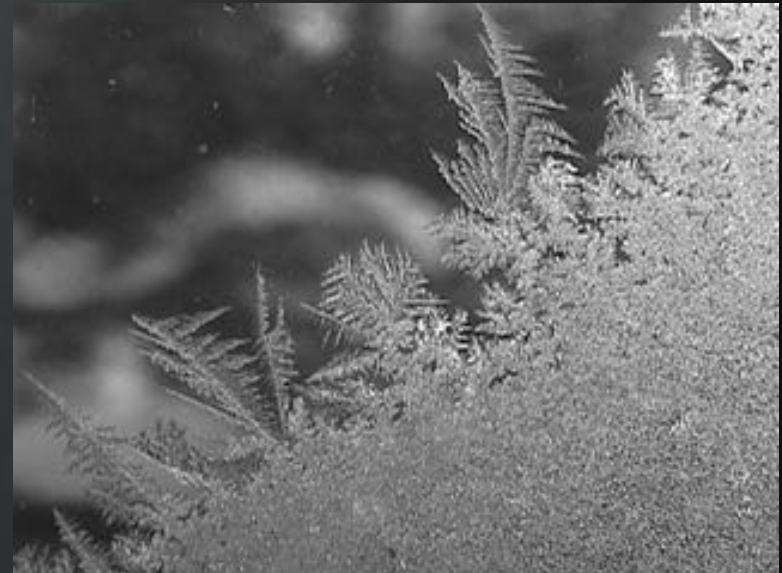


Fractais possuem invariância de escala

Alguns fractais



Conjunto de Mandelbrot



Auto-similaridade estatística

- A auto-similaridade pode ser estendida sistemas onde partes apenas “se parecem” com o todo.
- Fractais aleatórios

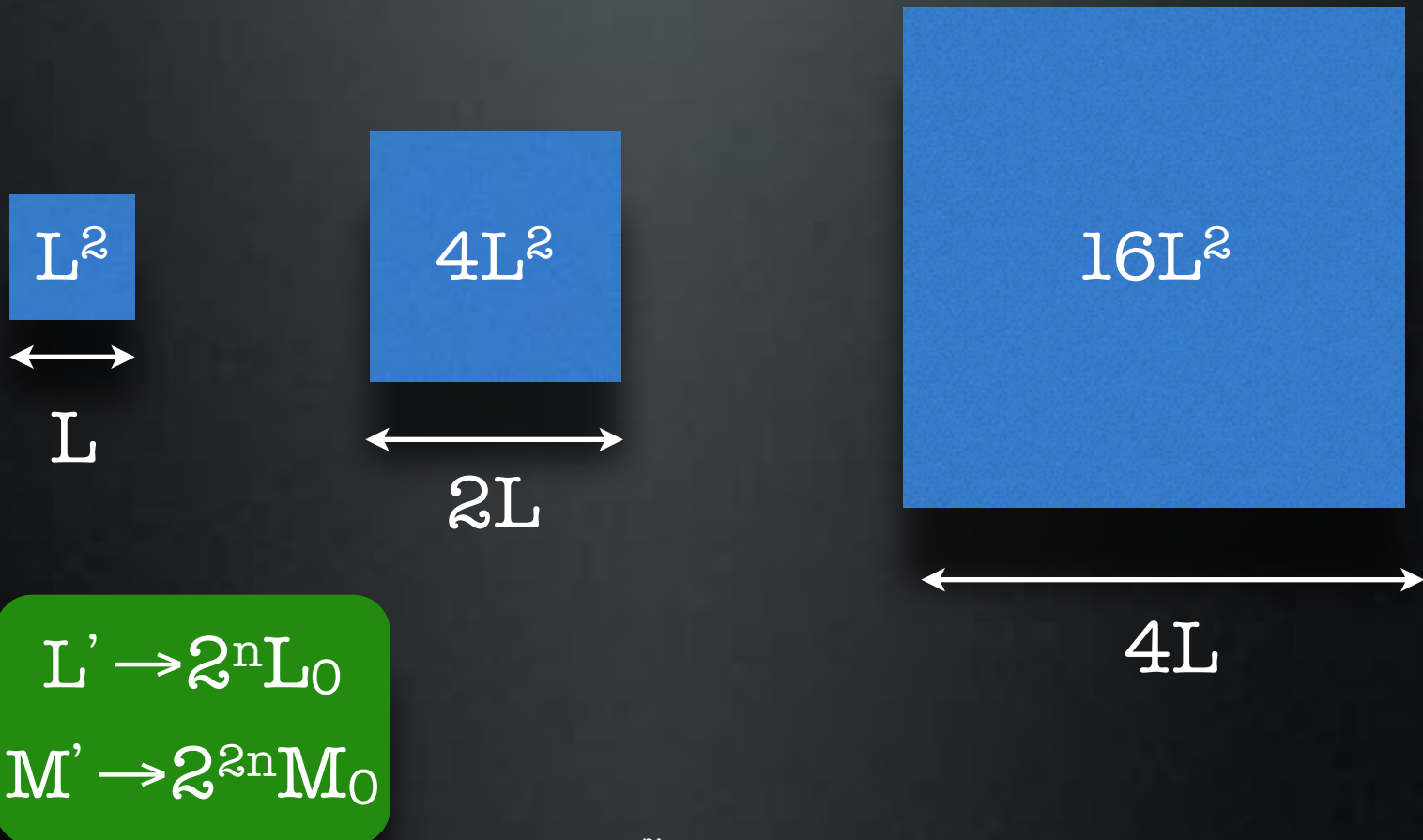


Geometria

- Formas produzidas pelo homem: geometria euclidiana
 - Linhas, planos, esferas e cilindros pertencem a uma dimensão inteira, seja 1, 2 ou 3
- Conceito intuitivo e matemático de dimensão
 - Intuitivamente...
 - $n D \rightarrow n$ números para definir univocamente um ponto.
 - $1D \rightarrow$ linha, círculo, curva.
 - $2D \rightarrow$ Plano, superfície de uma esfera, etc.

Uma descrição matemática

- Como o tamanho do sistema (ou massa) se comporta quando sua **dimensão linear** varia.



definindo dimensão fractal

Lembrando que $L' \rightarrow 2^n L_0, M' \rightarrow 2^{2n} M_0$

Se definirmos a dimensão do espaço como

$$M \sim L^d \quad (L_0 = M_0 = 1), \\ d = \log(M) / \log(L) = 2$$


 M_0
 L_0

 $3M_0$
 $2L_0$

 $9M_0$
 $4L_0$

$$L = 4L_0 = 2^n L_0$$

$$M = 9M_0 = 3^n M_0$$

$$d = \log(3)/\log(2)$$

Conjunto de Cantor


 L_0
 M_0

 $3L_0$
 $2M_0$

 $9L_0$

 $4M_0$

$$L = 9L_0 = 3^n L_0$$

$$M = 4M_0 = 2^n M_0$$

$$d = \log(2)/\log(3)$$

Curva de Koch


 L_0
 M_0

 $3L_0$
 $4M_0$

 $9L_0$
 $16M_0$

$$L = 9L_0 = 3^n L_0$$

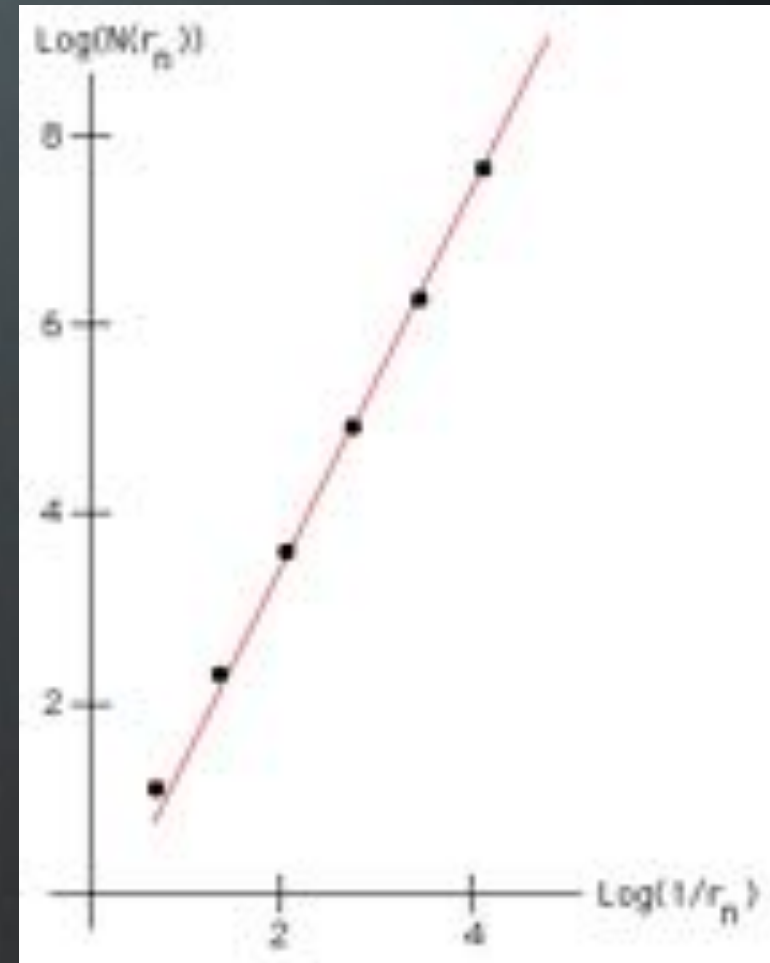
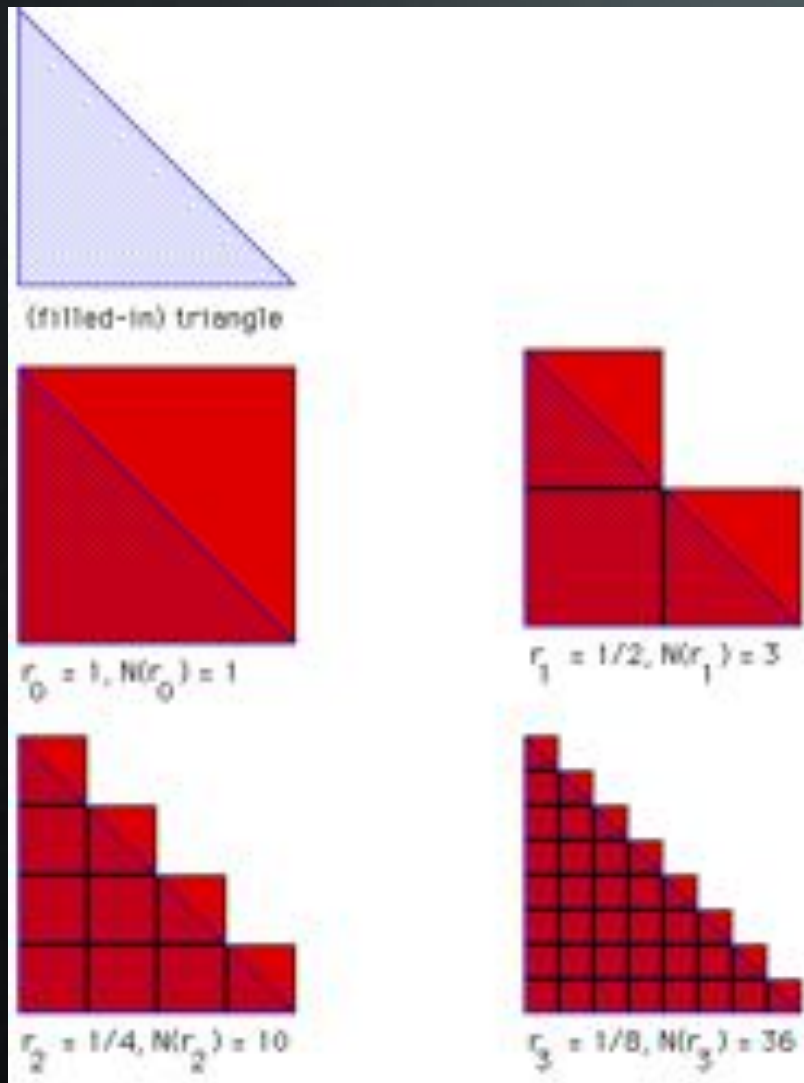
$$M = 16M_0 = 4^n M_0$$

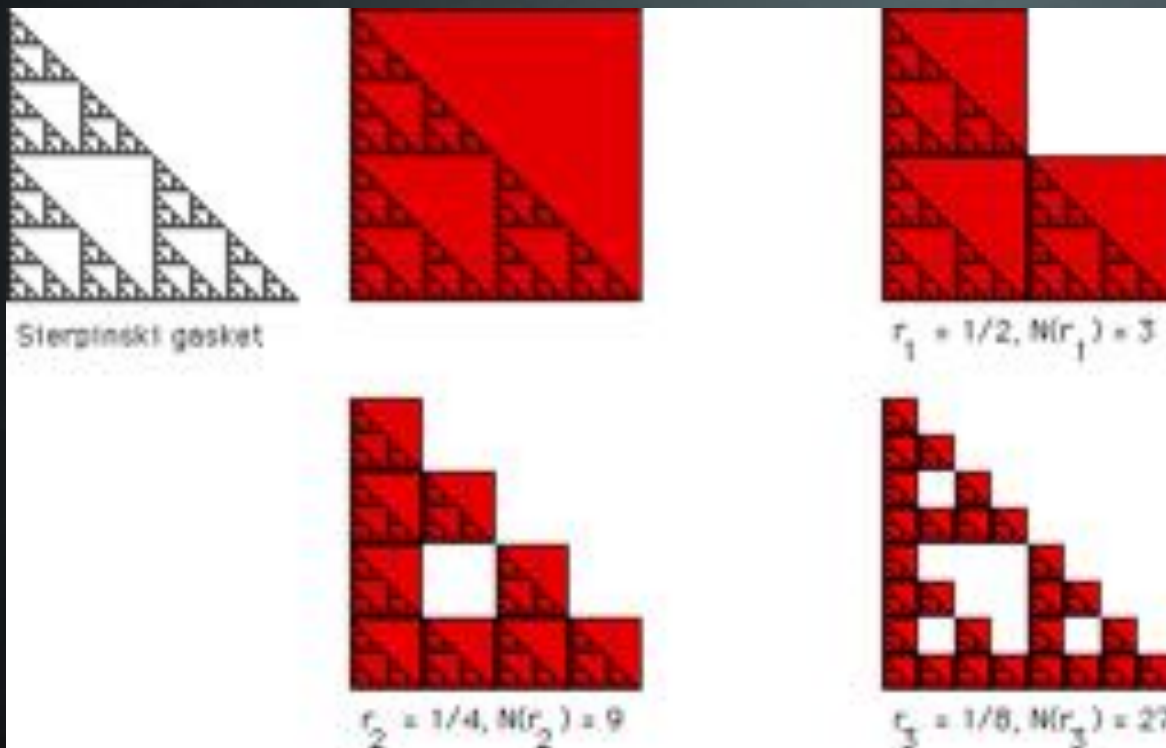
$$d = \log(4)/\log(3)$$

Calculando numericamente

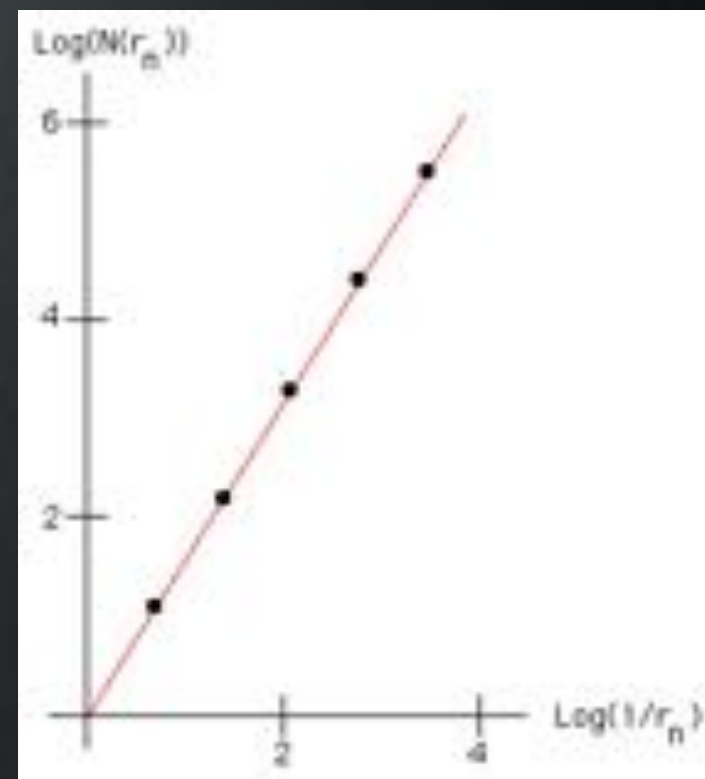
- Em geral, para calcular a dimensão fractal de fractais não-determinísticos inseridos em d dimensões:
 1. Posicione N caixas de tamanho L sobre o fractal
 2. Conte quantas caixa de tamanho L contém um pedaço de fractal, $M(L)$
 3. Faça a média sobre diferentes posições de caixa
 4. Repita 1-3 para um novo tamanho L

Na prática

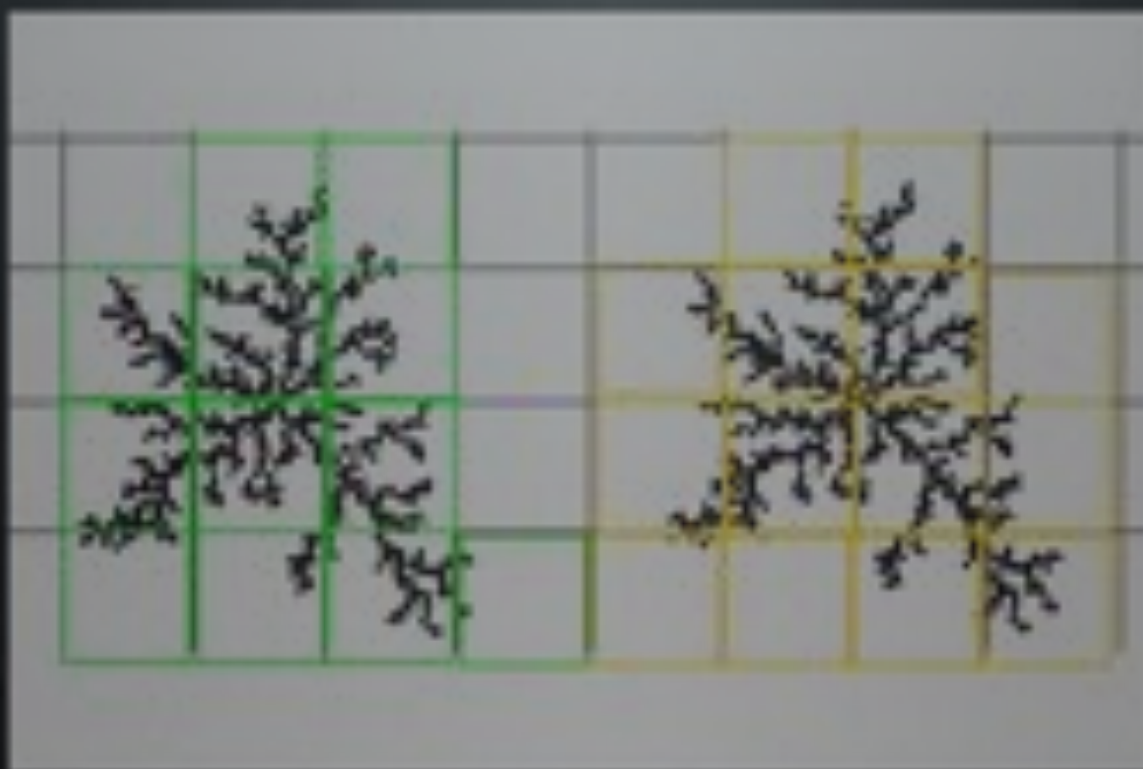
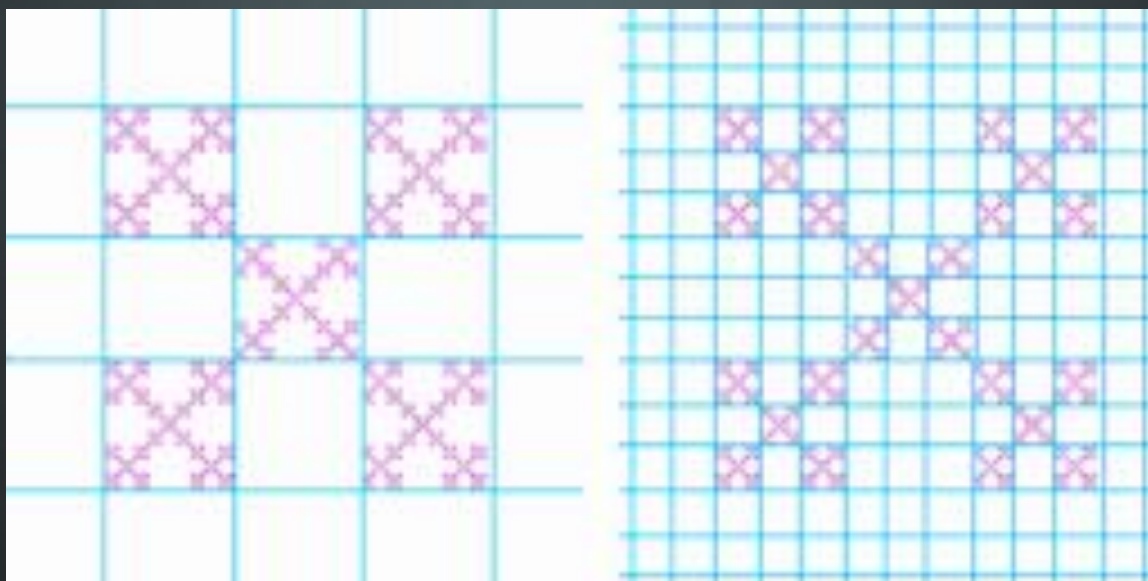




$d=1.59$







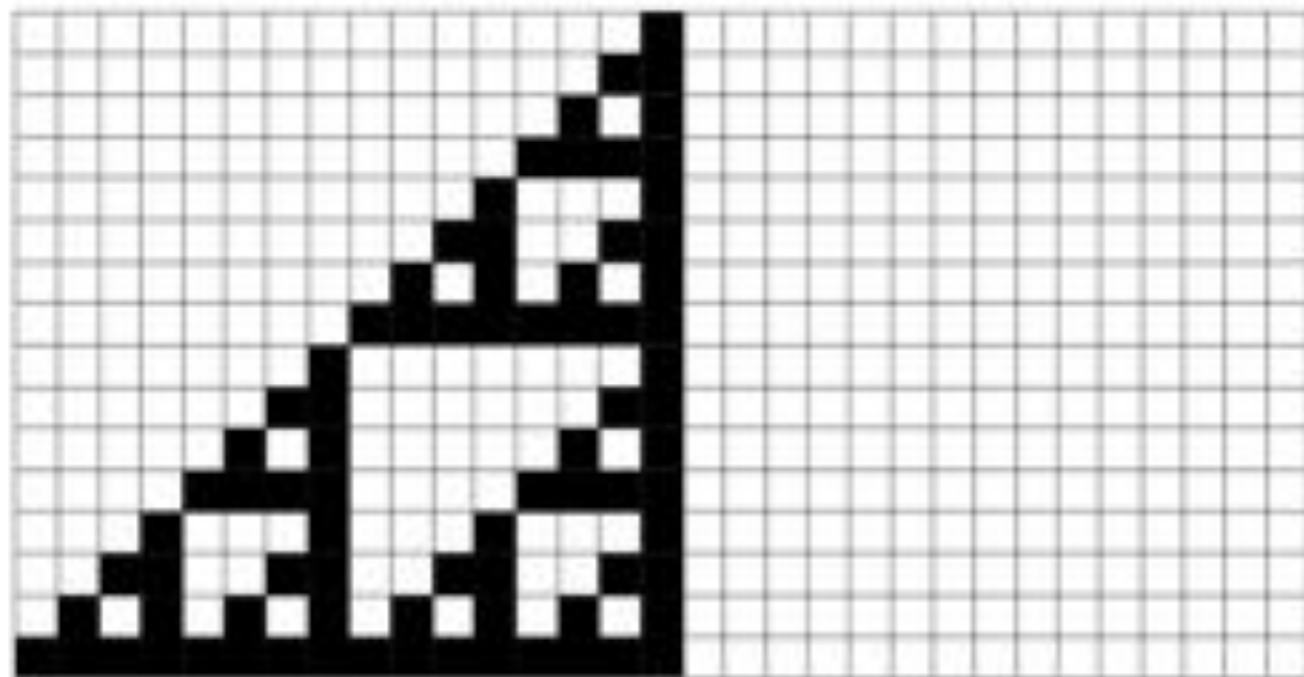
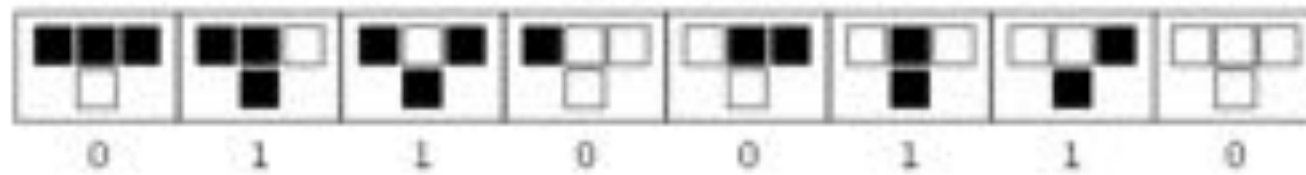
Leis de escala

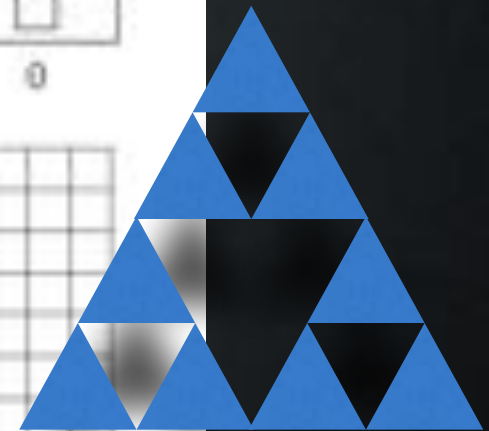
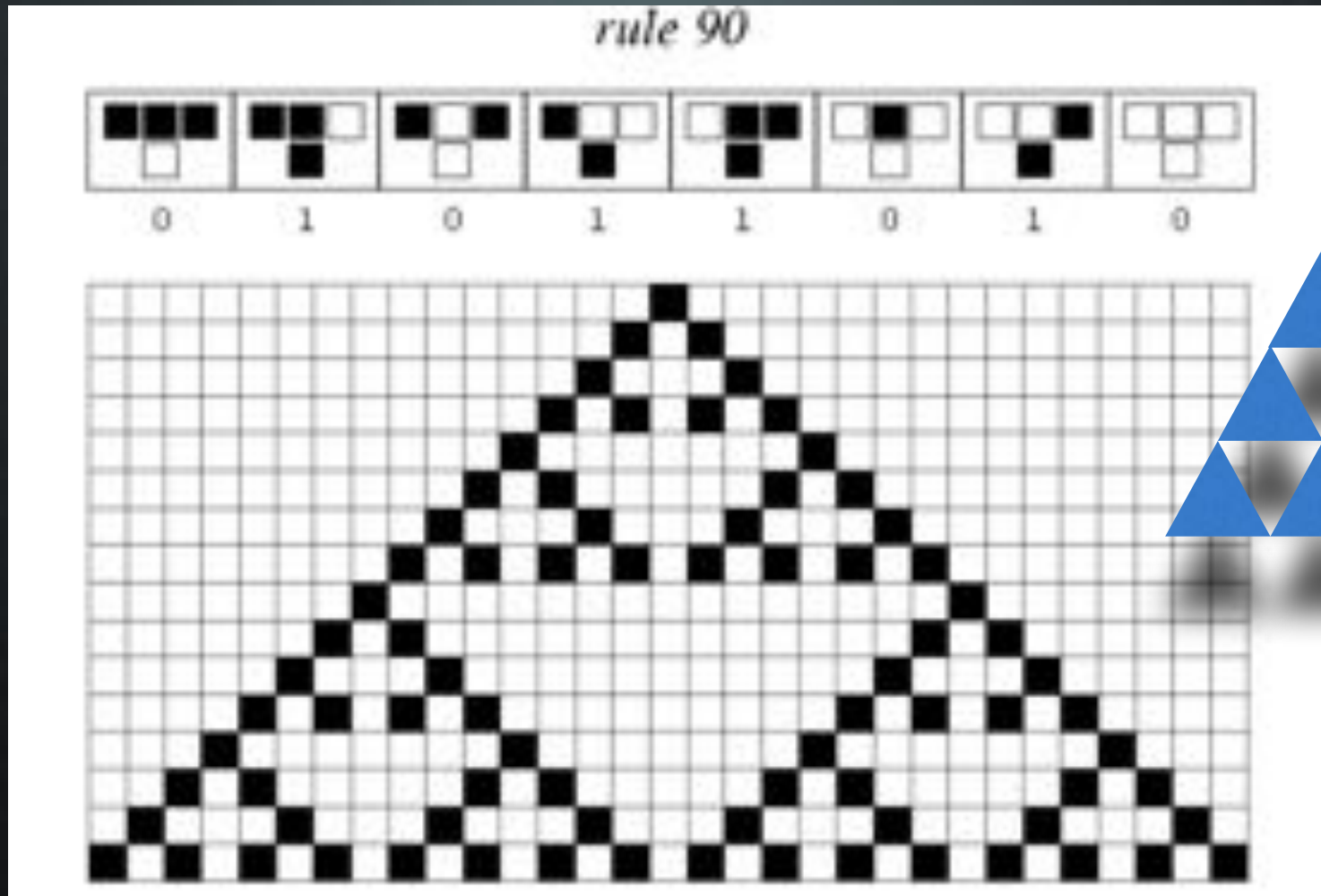
- Em geral, para cada comprimento L ,
 - $M \sim L^{d_f}$, $d_f = \log(M(L))/\log(L)$
- A densidade se escreve
 - $\rho(L) = M/L^d = L^{d_f-d}$
- Porque a relação tipo lei de potência é relevante?
- Temos que $\rho(\lambda L) = \lambda^{d_f-d} \rho(L)$,
- ou seja, as propriedades estatísticas em uma dada escala são idênticas as do sistema em outra escala, multiplicadas por um fator de escala

Como fazer um fractal?

- Método mais simples: Autômatos celulares
 - Conjunto de células onde cada uma se encontra em um determinado estado, que pode se alterar a passos de tempo discretos, dependendo do próprio estado e do estado dos seus vizinhos

rule 102

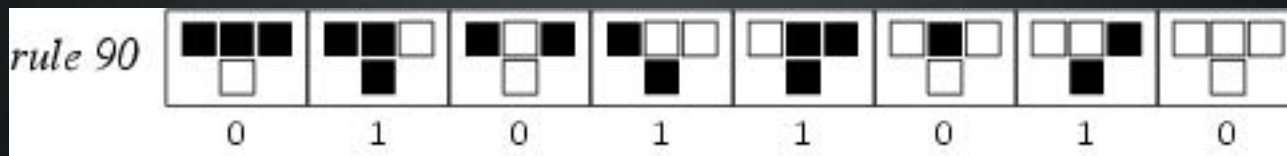




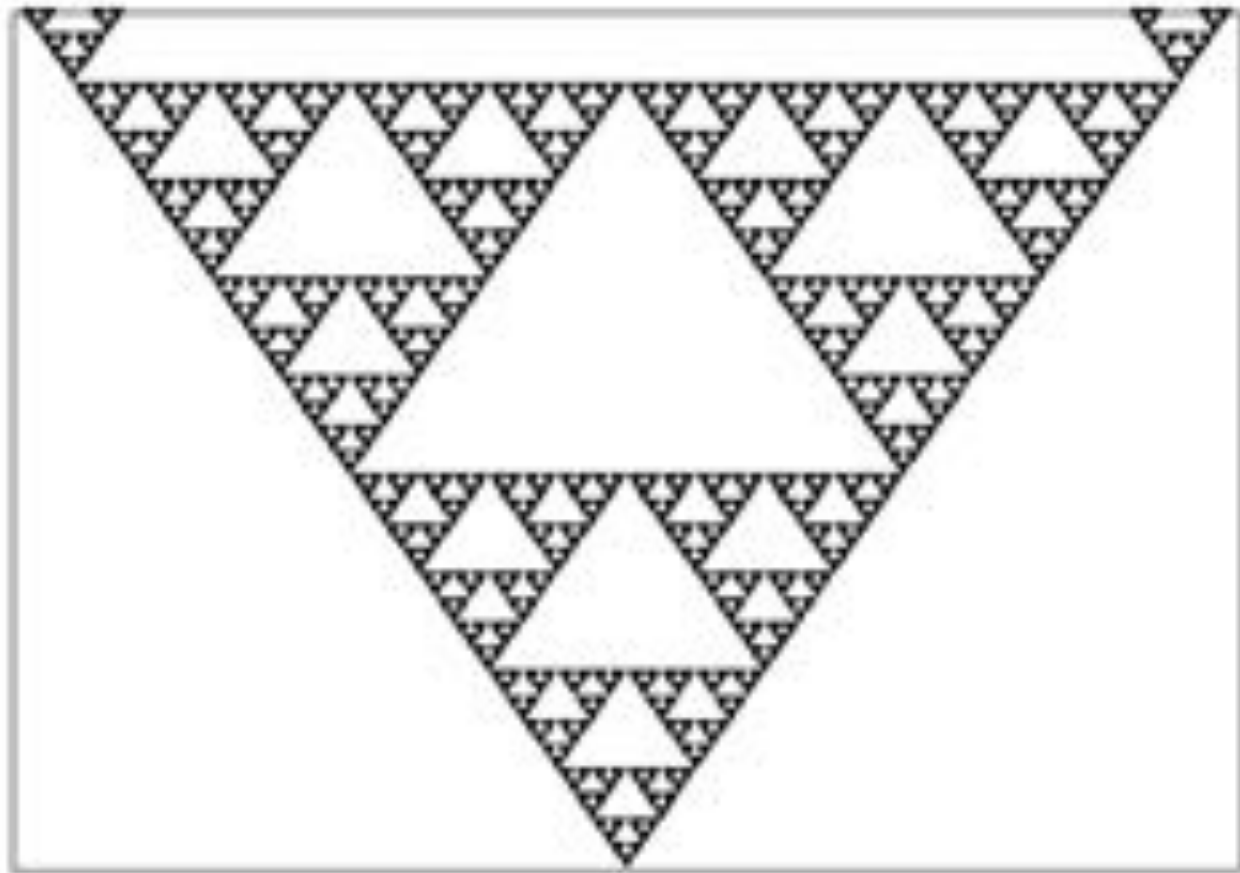
Ops!

Implementação da regra 90

- O programa tem aproximadamente 10 linhas. É realmente muito simples.
- Utilizando o XOR:
 - 1 XOR 1 = 0 | 0 XOR 0 = 0 | 1 XOR 0 = 1 |



- $H(i,t) = \text{XOR}(H(i-1,t-1), H(i+1,t-1))$



Dimensão fractal na prática

- Vamos medir a dimensão fractal de uma bola de papel amassado.
- Para isso consideramos diferentes bolas de papel, e graficamos o logaritmo da área vs. o diâmetro.
- O coeficiente angular da reta obtida vai medir d .
- Finalmente, faremos o histograma de todos os resultados obtidos para d .