Curso Mecânica Clássica II - 2019/2

Lista 1

1. (Kibble, chap 9) Considere uma esfera de massa total M e carga total Q, imersa num campo magnético $\mathbf{B}$ constante. Saiba ainda que as densidades de massa ρ_m e carga ρ_e são proporcionais e funções apenas da distância ao centro da esfera (ou seja, ambas as distribuições são esfericamente simetricas)

   (a) Mostre que, se esfera está girando em torno de um dos seus eixos de simetria, o torque exercido sobre ela é dado por (no sistema c.g.s.)

   $$\mathbf{N} = \frac{gQ}{2Mc}\mathbf{L} \times \mathbf{B} \tag{1}$$

   onde $\mathbf{L}$ é o momento angular da esfera com relação ao seu centro (seu "spin"), g é uma constante adimensional e c é a velocidade da luz. Além disso, determine quem é g.

   (b) Escreva uma equação de movimento para o corpo, e mostre que podemos eliminar esse torque magnético com uma escolha adequada de sistema de coordenadas.

2. (Marion, chap 11) Uma esfera sólida de massa M e raio R gira livremente no espaço em torno de um diâmetro fixo. Suponha então que um trenzinho de massa m, inicialmente em um dos polos, se move sobre trilhos fixos num grande círculo da esfera, com velocidade (de módulo) constante em direção ao outro polo. Mostre que, quando o trenzinho, aproximado por uma partícula, chegar ao polo oposto, a rotação da esfera terá sido retardada do seguinte ângulo

   $$\alpha = \omega T \left[1 - \sqrt{\frac{2M}{2M + 5m}}\right] \tag{2}$$

   onde ω é a velocidade angular da esfera no início do movimento da partícula e T é o tempo que a partícula leva para ir de um polo ao outro.

3. (Marion, chap 11) Considere uma placa muito fina contida no plano XY, de formato e composição arbitrários.

   (a) Mostre que, num sistema de coordenadas ortogonal $\{x_1, x_2, Z\}$, a matriz relativa ao operador de inércia pode ser escrita como

   $$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix} \tag{3}$$

(b) Mostre que, mediante uma rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo Z, tal matriz se transforma em

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} A' & -C' & 0 \\ -C' & B' & 0 \\ 0 & 0 & A'+B' \end{bmatrix} \tag{4}$$

onde

$$A' = A\cos^2\phi - C\sin 2\phi + B\sin^2\phi \tag{5}$$
$$B' = A\sin^2\phi + C\sin 2\phi + B\cos^2\phi \tag{6}$$
$$C' = C\cos 2\phi - \frac{1}{2}(B-A)\sin 2\phi \tag{7}$$

(c) Por fim, mostre que os eixos x_1 e x_2 se tornam principais quando

$$\phi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2C}{B-A}\right) \tag{8}$$

4. (Lemos, chap 4) Um automóvel sai do repouso com aceleração constante a e com uma de suas portas completamente aberta, ou seja, fazendo um ângulo de 90^o com o plano sagital do carro. Aproximando a porta por um retângulo de largura l e altura h, mostre que o tempo T que leva até a porta fechar é

$$T = \sqrt{\frac{l}{3a}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \tag{9}$$

obs: note estamos desprezando a ação da atmosfera, ou seja, não tem nenhum "vento" fechando a porta.
obs 2: Você pode achar útil ir para o referencial do carro.