Curso Mecânica Clássica I - 2019/1

Lista 2

1. A partir da conservação do momento angular $\mathbf{L}$ em um movimento sujeito a uma força $\mathbf{F} = -(k/r^2)\hat{\mathbf{r}}$:

   (a) demonstre a lei das áreas (2a Lei) de Kepler.

   (b) Demonstre que a área A cercada por uma órbita fechada está relacionada com o período do movimento τ por

   $$A = \frac{L\tau}{2m}$$

   onde $L = |\mathbf{L}|$.

   (c) Argumente que τ coincide com o período do movimento radial τ_R.

   (d) Finalmente, calcule o período τ_R demonstre a 3a lei de Kepler.

2. Considere uma partícula de carga q e massa m, em movimento, sujeita a campos elétrico e magnético $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ constantes. Podemos, sem nenhuma perda de generalidade, fazer $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{E} = E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}}$. Sabendo que a força de Lorentz é dada por $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$,

   (a) Determine as equações diferenciais para as 3 componentes do movimento

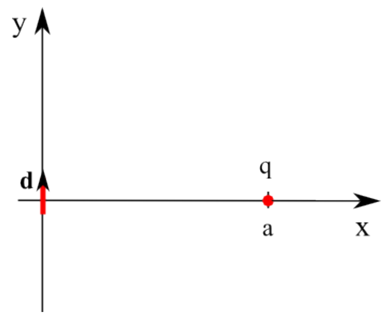
   (b) No caso particular em que $E_z = 0$, resolva essas equações e encontre a solução geral para o movimento.

   (c) Encontre o movimento particular para $\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = 0$ e $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$. Encontre ainda a equação para a trajetória da partícula, e a resolva. Esboce a trajetória: ela parece estranha para você? Interprete.

3. Um monopólo elétrico (puntiforme) de carga q e massa m está a uma distância a de um dipólo elétrico (também puntiforme) de momento de dipólo $\mathbf{d} = d\,\hat{\mathbf{y}}$ e massa m, como mostra a figura. Sabendo que o campo de um dipólo elétrico é dado por

   $$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{d}}{r^3} \tag{1}$$

   e relembrando o seu conhecimento de física 3 sobre forças e torques em cargas e dipólos, responda



(a) Mostre que os torques relativos ao centro de massa se anulam nesse sistema.

(b) Escreva as equações de movimento para esse sistema em nome do centro de massa R e da coordenada relativa **r**.

4. Determine a trajetória de uma partícula sujeita a um potencial

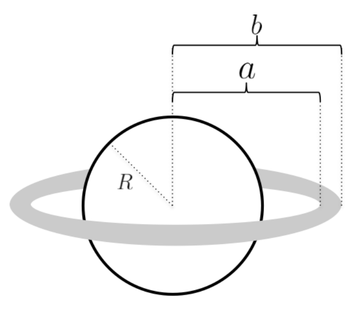
$$V = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

onde α, β são duas constantes positivas. Assim sendo,

(a) Mostre que o pericentro não é mais constante, e calcule o ângulo $\Delta\theta$ entre duas passagens consecutivas pelo pericentro.

(b) Encontre o período radial das oscilacões T_r, e o período das revoluções T_θ. Sob que condições a órbita será fechada?

5. Considere um planeta esfericamente simétrico que contém em seu plano equatorial um anel descrito por uma coroa circular homogênea de raio interno a e raio externo b, sendo $a > R$, onde R é o raio do planeta, como indica a figura.



Sejam M_1 e M_2 as respectivas massas do planeta e do anel. O centro do anel coincide com o centro do planeta e essa configuração não se altera com o tempo. Escolha os eixos cartesianos de modo que o plano equatorial (plano do anel) coincida com o plano $\mathcal{OXY}$ e a origem esteja no centro do planeta, de modo que o eixo $\mathcal{OZ}$ é o eixo de simetria do sistema planeta-anel.

(a) Utilizando a expansão em multipolos para o potencial gravitacional, calcule até a ordem de quadrupolo (inclusive) o potencial criado pelo sistema planeta-anel em um ponto genérico do espaço $P(r, \theta, \phi)$, tal que $r > b$.

(b) Calcule o campo gravitacional correspondente. Esse campo é central?

(c) Imagine agora que há um satélite de massa em m em órbita desse sistema. Supondo que tal satélite pode ser aproximado por uma partícula, calcule o torque exercido sobre ele com relação ao centro de massa do sistema.