

Conteúdo

1 Vetores no Espaço Euclidiano

1.1	Introdução	1
1.2	Conceito de vetor de deslocamento	2
1.3	Produtos interno e externo de vetores	10
1.4	Bases e componentes de vetores	20
1.5	Vetores ligados do Espaço Euclidiano	29
1.6	Espaço vetorial \mathbb{R}^n	31
1.7	Sistemas de eixos Cartesianos	34
1.8	Funções vetoriais de variável real	41

2 Princípios da Mecânica Clássica

2.1	Protomecânica.	45
2.2	Princípios de cinemática	49
2.3	Princípios de dinâmica	59
2.4	Definições de massa e força e as três leis de Newton do movimento.	68
2.5	Espaço-tempo newtoniano e princípio da relatividade galileana.	73
2.6	Sistemas de partículas.	83

3 Movimento Unidimensional de uma Partícula

3.1	Introdução	91
3.2	Força aplicada dependente apenas do tempo	94
3.3	Força dependente apenas da velocidade	95
3.4	Força dependente apenas da posição	98
3.5	Oscilador harmônico amortecido	104
3.6	Oscilador harmônico forçado	108
3.7	Oscilador harmônico forçado por força prescrita arbitrária.	118

4 Movimento Multidimensional de uma partícula

4.1	Introdução	123
4.2	Teoremas do momento linear, do momento angular e da energia cinética	129
4.3	Forças conservativas e energia potencial	132
4.4	Partícula em campo eletromagnético	136
4.5	Movimento sob força central	139
4.6	Força central inversamente proporcional ao quadrado da distância . .	144
4.7	Problema de Kepler	148
4.8	Seção de choque e problema de Rutherford	149

5 Movimento de um sistema de Partículas

5.1	Introdução	157
5.2	Momento linear de um sistema	158
5.3	Momento angular de um sistema	160
5.4	Energia do sistema	164
5.5	Movimento em relação ao centro de massa	168
5.6	Problema de dois corpos	171
5.7	Rotação de corpo rígido em torno de eixo fixo	173

6 Teoria Newtoniana da Gravitação

6.1	Lei de gravitação universal	177
6.2	Força e campo gravitacionais	179
6.3	Potencial gravitacional	181
6.4	Lei de Gauss da gravitação	184
6.5	Distribuições contínuas de massa	186
6.6	Multipolos gravitacionais	190
6.7	Energia potencial gravitacional	194

7 Cordas Vibrantes

7.1	Equação de movimento para uma corda vibrante	197
7.2	Condições inicial e de contorno para a corda vibrante	204
7.3	Modos normais da corda vibrante	209
7.4	Ondas na corda	212
7.5	Oscilações transversais numa rede unidimensional	215

8 Fluidos

8.1	Introdução	221
8.2	Estática dos fluidos	224
8.3	Cinemática dos fluidos	227
8.4	Dinâmica de um fluido ideal	236
8.5	Momento linear, momento angular e energia	237

9 Movimento de um corpo rígido

9.1	Introdução	243
9.2	Noções de cinemática de um corpo rígido	246
9.3	Referenciais não-inerciais	252
9.4	Operador de inércia	254
9.5	Diagonalização do operador de inércia	259
9.6	Equações de Euler	262
9.7	Ângulos de Euler	269
9.8	Pião simétrico com ponta fixa em campo gravitacional	272

10 Mecânica Analítica

10.1	Introdução	277
10.2	Princípio de D'Alembert e equações de Lagrange	278
10.3	Lagrangiano	284
10.4	Teoremas de conservação no formalismo lagrangiano	288
10.5	Equações canônicas de Hamilton	290
10.6	Princípio da ação	294

Capítulo 1

Vetores no Espaço Euclidiano

1.1 Introdução

Em Mecânica estudamos o movimento de corpos no espaço; eles ocupam porções do espaço que vão mudando durante o movimento. O espaço e seus subconjuntos são objetos de estudo da Geometria. É portanto claro que o estudo da Mecânica pressupõe conhecimentos de Geometria. A Geometria do espaço da Mecânica Clássica é a Geometria Euclidiana.

Em Geometria Euclidiana entendemos que o espaço, que denotamos por \mathcal{E} , é um conjunto cujos elementos são os **pontos**. Os subconjuntos mais fundamentais do espaço euclidiano são as **retas** e os **planos**. Para retas e planos são definidos conceitos de **paralelismo**. Retas paralelas definem uma **direção** e planos paralelos definem uma **jazitura**. Se duas retas são paralelas dizemos que uma tem a mesma direção que a outra, ou que ambas têm a mesma direção. Se dois planos são paralelos dizemos que um tem a mesma jazitura que o outro, ou que ambos têm a mesma jazitura. De uma reta paralela a um plano dizemos que está na jazitura do plano. Em cada reta e em cada direção do espaço existem dois **sentidos** de percurso, que são ditos opostos.

Um conceito fundamental em Geometria Euclidiana é o de **distância** entre pontos. A distância entre dois pontos é o comprimento do segmento que os une medido em relação a um certo segmento convencionado como padrão ou unidade de comprimento. Esse é, essencialmente, o conceito de distância dado por uma régua comum. Com esse conceito, é possível definir uma função d , também chamada **distância**, que associa a cada par de pontos um número real,

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: (P, Q) \longmapsto d(P, Q) , \end{aligned} \tag{1.1}$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} \text{d1)} \quad & d(P, Q) \geq 0, \quad d(P, Q) = 0 \iff P = Q, \\ \text{d2)} \quad & d(P, Q) = d(Q, P), \\ \text{d3)} \quad & d(P, Q) \leq d(P, M) + d(M, Q). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Associado ao conceito de distância temos o conceito de **ângulo** entre semi-retas e as funções **trigonométricas**.

Em geometria euclidiana é também fundamental o conceito de **perpendicularidade** entre retas, planos, direções e jazituras. Dado um plano, ou sua jazitura, existe uma única direção que lhe é perpendicular, e vice-versa. Nessa direção há dois sentidos, de modo que há também dois sentidos em que se pode atravessar o plano, passando de um para outro dos semiespaços em que o plano divide o espaço; com isso, dois sentidos ficam também associados a cada jazitura. Outros conceitos e resultados da Geometria Euclidiana serão usados no que segue, mas serão mencionados quando se fizerem necessários.

No estudo da Geometria e da Mecânica é sumamente útil, senão imprescindível, o conceito de **vetor**, particularmente o de vetor-deslocamento. No restante deste capítulo estudaremos os vetores-deslocamento e também outros tipos de vetores de uso comum em Geometria e Mecânica.

1.2 Conceito de vetor de deslocamento

Dados dois pontos distintos P e Q , existe uma única reta que passa por eles e um único segmento de reta que os une. Os pontos P e Q podem ser ordenados de duas maneiras, (P, Q) e (Q, P) , que correspondem aos dois sentidos de percurso na reta. O segmento de reta com um sentido especificado é chamado **segmento de reta orientado**, ou simplesmente **seta**. A seta determinada pelos pontos P e Q , com sentido de P para Q , é denotada por \overrightarrow{PQ} ; se o sentido fosse de Q para P , seria denotada por \overrightarrow{QP} . Definimos **direção** da seta \overrightarrow{PQ} como sendo a direção da reta que passa por P e Q , e **sentido** da seta \overrightarrow{PQ} como sendo o sentido de P para Q . Definimos também **comprimento**, ou **módulo**, da seta \overrightarrow{PQ} , que denotamos por $|\overrightarrow{PQ}|$, como sendo a distância entre P e Q ,

$$|\overrightarrow{PQ}| := d(P, Q). \tag{1.3}$$

Em uma seta \overrightarrow{PQ} os pontos P e Q são chamados suas **extremidades**, o ponto P é chamado seu **ponto inicial** e o ponto Q , seu **ponto final**. O ponto P é também chamado **ponto de aplicação** ou **origem** da seta \overrightarrow{PQ} . A reta que passa por P e Q é chamada **reta suporte** de \overrightarrow{PQ} . Em ilustrações a seta é representada pelo segmento correspondente com uma ponta no ponto final, como na figura 1.1.

É conveniente definir a seta degenerada ou **seta nula**, constituída por um único ponto, digamos P . Representando-a por \overrightarrow{PP} , temos $\overrightarrow{PP} = \{P\}$. Por definição, ela tem direção e sentido indeterminados e comprimento nulo, $|\overrightarrow{PP}| = 0$. Dizemos que seu ponto final é seu ponto de aplicação.

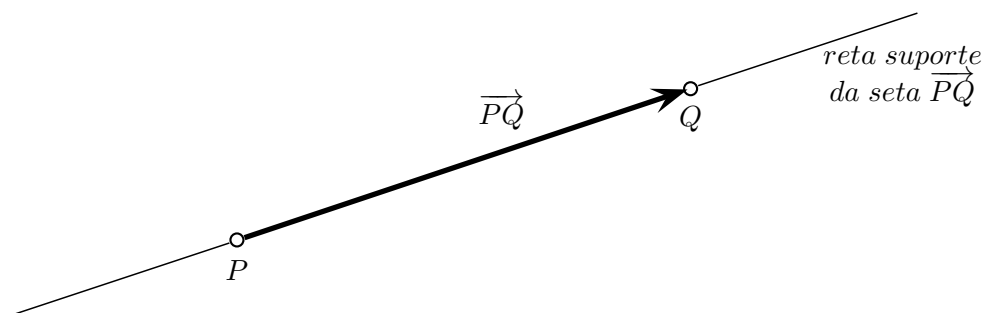


Figura 1.1: Seta \vec{PQ} com ponto de aplicação P e ponto final Q .

Sabemos que duas setas não-nulas têm a mesma direção se suas retas suportes são paralelas. Para duas setas de mesma direção podemos definir o que significa terem o mesmo sentido ou sentidos opostos. Sejam \vec{PQ} e $\vec{P'Q'}$ duas setas não-nulas e de mesma direção. Se tiverem a mesma reta suporte podemos determinar se os sentidos de percurso de P para Q e de P' para Q' são idênticos ou não sobre a reta; dizemos então que as duas setas têm mesmo sentido ou sentidos opostos, respectivamente. Se as duas setas têm retas suportes distintas podemos determinar se o segmento de reta PP' que passa pelos pontos iniciais das setas intercepta ou não o segmento QQ' que passa pelos pontos finais; diremos que as duas setas têm **mesmo sentido** se os segmentos não se interceptarem e, **sentidos opostos** se os segmentos se interceptarem.

Uma seta não-nula $\vec{P'Q'}$ é dita **equipolente** a outra seta não-nula \vec{PQ} se $\vec{P'Q'}$ tem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento que \vec{PQ} . Por definição, uma seta nula é equipolente a qualquer outra seta nula, não é equipolente a uma seta não-nula, e vice versa. Para designar que uma seta $\vec{P'Q'}$ é equipolente a \vec{PQ} , escrevemos $\vec{P'Q'} \sim \vec{PQ}$. Se $\vec{P'Q'} \sim \vec{PQ}$ dizemos também que a seta $\vec{P'Q'}$ é dada por um **transporte paralelo** de \vec{PQ} . Essa expressão quer indicar que podemos transportar a seta $\vec{P'Q'}$ paralelamente a si mesma, *i.e.*, sem alterar sua direção, seu sentido e seu módulo, até que ela coincida com \vec{PQ} , conforme ilustrado na figura 1.2.

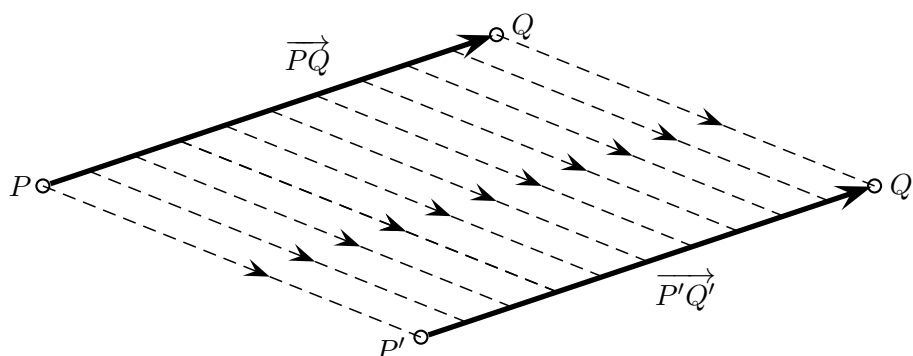


Figura 1.2: Se a seta $\vec{P'Q'}$ é equipolente a \vec{PQ} , dizemos que $\vec{P'Q'}$ é um transporte paralelo de \vec{PQ} .

É fácil demonstrar que

$$\begin{aligned} &\sim 1) \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PQ}, \\ &\sim 2) \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'} \implies \overrightarrow{P'Q'} \sim \overrightarrow{PQ}, \\ &\sim 3) \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'} \text{ e } \overrightarrow{P'Q'} \sim \overrightarrow{P''Q''} \implies \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P''Q''}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

i.e., que \sim é uma relação de equivalência. O conjunto formado por todas as setas equipolentes a uma seta \overrightarrow{PQ} é denotado por $[\overrightarrow{PQ}]_{\sim}$ e chamado **classe de equipolência** da seta \overrightarrow{PQ} , ou classe **gerada** por essa seta. Toda seta do espaço está em alguma classe e classes distintas são sempre disjuntas. Além disso, $\overrightarrow{P'Q'} \sim \overrightarrow{PQ}$ implica $[\overrightarrow{P'Q'}]_{\sim} = [\overrightarrow{PQ}]_{\sim}$, *i.e.*, setas equipolentes entre si geram a mesma classe. Cada classe é chamada uma **translação**, ou um **deslocamento**, no espaço euclidiano \mathcal{E} . Definimos **direção** e **sentido** de um deslocamento como sendo, respectivamente, a direção e o sentido de qualquer uma de suas setas. Chamamos **comprimento**, ou **módulo**, de um deslocamento o comprimento de qualquer uma de suas setas. Denotaremos um deslocamento por uma única letra em negrito, por exemplo, podemos denotar por \mathbf{a} o deslocamento $[\overrightarrow{PQ}]_{\sim}$; assim, $\mathbf{a} = [\overrightarrow{PQ}]_{\sim}$. Em manuscritos, ao invés da letra em negrito, usa-se a letra encimada por uma seta, $\vec{a} := [\overrightarrow{PQ}]_{\sim}$. O módulo de \mathbf{a} é denotado por $|\mathbf{a}|$ ou simplesmente por a . O deslocamento gerado por uma seta nula é denotado por $\mathbf{0}$ e chamado **deslocamento nulo**; assim, $\mathbf{0} = [\overrightarrow{PP}]_{\sim}$.

Se $\mathbf{a} = [\overrightarrow{PQ}]_{\sim}$ dizemos que \mathbf{a} é o deslocamento, ou a translação, determinado pela seta \overrightarrow{PQ} ; em contrapartida, dizemos que \overrightarrow{PQ} , ou qualquer outra seta em $[\overrightarrow{PQ}]_{\sim}$ é uma **seta representativa** do deslocamento \mathbf{a} ou, simplesmente, um **representativo** de \mathbf{a} . De um modo mais específico, dizemos que \overrightarrow{PQ} , pertencente a \mathbf{a} , é o **representativo de \mathbf{a} aplicado no ponto P** , ou ainda, que \overrightarrow{PQ} é o **deslocamento \mathbf{a} aplicado em P** . Note que um deslocamento não-nulo fica caracterizado se, e somente se, especificarmos para ele um módulo, uma direção e um sentido. Em contrapartida, para caracterizar uma seta particular qualquer desse deslocamento, além de especificar para ela o módulo, a direção e o sentido, devemos acrescentar uma outra informação, por exemplo, seu ponto de aplicação. De modo informal, diz-se que um deslocamento é uma seta com ponto de aplicação indeterminado, ou ainda, uma seta que pode ser desenhada em qualquer lugar do espaço, mantendo-se o mesmo módulo, a mesma direção, e o mesmo sentido.

É simples desenhar uma seta, mas impossível desenhar um deslocamento, por ser um conjunto infinito de setas. No entanto, como são todas equipolentes, se desenharmos uma saberemos como são todas as outras. Por esse motivo, para representarmos em figuras um deslocamento, podemos usar apenas uma de suas setas ou, se quisermos, algumas delas. Sabemos, então, que as infinitas outras tem os mesmos módulo, direção e sentido das que foram desenhadas. A figura 1.3 ilustra um particular deslocamento $\mathbf{a} := [\overrightarrow{PQ}]_{\sim}$ mostrando diversas de suas setas.

Denotaremos por $\vec{\mathcal{E}}$ o conjunto de todos os deslocamentos no Espaço Euclidiano \mathcal{E} . Sejam dois deslocamentos \mathbf{a} e \mathbf{b} . Tomemos um representativo qualquer de \mathbf{a} e o representativo de \mathbf{b} que tenha como ponto inicial o ponto final do representativo de \mathbf{a} . Existe uma única seta com ponto inicial no ponto inicial do representativo de \mathbf{a} e com ponto final no ponto final do representativo de \mathbf{b} . Essa seta determina um deslocamento único, que chamamos **resultante** dos deslocamentos \mathbf{a} e \mathbf{b} , ou **soma**

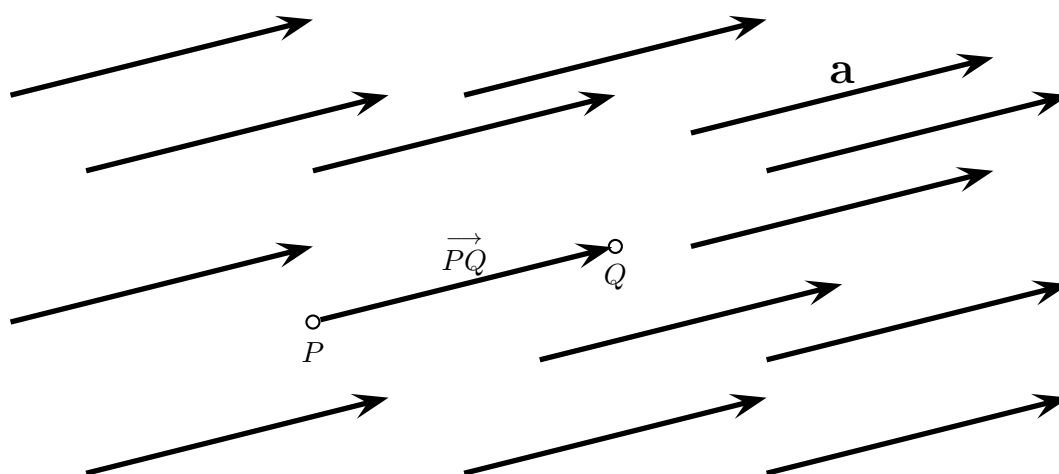


Figura 1.3: Setas do conjunto $\mathbf{a} = [\vec{PQ}]_{\sim}$, que denominamos deslocamento, ou translação.

geométrica dos deslocamentos \mathbf{a} e \mathbf{b} . É comum chamar a soma geométrica de \mathbf{a} e \mathbf{b} simplesmente **soma** de \mathbf{a} e \mathbf{b} e representá-la por $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, conforme exemplificado na figura 1.4. A operação que associa a soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ao par (\mathbf{a}, \mathbf{b}) é chamada **adição geométrica** de deslocamentos ou, simplesmente, **adição de deslocamentos**. Essa operação é a função

$$\begin{aligned} + : \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ &: (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a} + \mathbf{b} . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Essa função $+$ é também chamada **regra do triângulo**. Cada um dos vetores adicionados é chamado uma **componente vetorial** da soma. A adição de deslocamentos goza das propriedades que seguem.

$$\begin{aligned} A1) \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \vec{\mathcal{E}} : \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} . \\ A2) \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \vec{\mathcal{E}} : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) . \\ A3) \forall \mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}}, \exists \mathbf{0} \in \vec{\mathcal{E}} \text{ tal que } \mathbf{a} + \mathbf{0} &= \mathbf{a} . \\ A4) \forall \mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}}, \exists -\mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}} \text{ tal que } \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) &= \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Em virtude de A1, temos, além de A3 e A4, que $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ e $(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$, para qualquer \mathbf{a} . Também temos que $\mathbf{0}$ é o único deslocamento que satisfaz A3 e que há, para cada \mathbf{a} , um único deslocamento $-\mathbf{a}$ que satisfaz a propriedade A4. É claro que $-\mathbf{a}$ é o deslocamento com mesmo módulo e direção que \mathbf{a} , mas com o sentido oposto ao de \mathbf{a} . O deslocamento $-\mathbf{a}$ é chamado **oposto** ao deslocamento \mathbf{a} . Obtém-se, imediatamente, que o oposto de $-\mathbf{a}$ é \mathbf{a} , i.e., $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.

Definimos a soma de dois deslocamentos \mathbf{a} e \mathbf{b} por meio da regra do triângulo. Uma outra regra de que dá o mesmo resultado é a seguinte. Tomemos um representativo

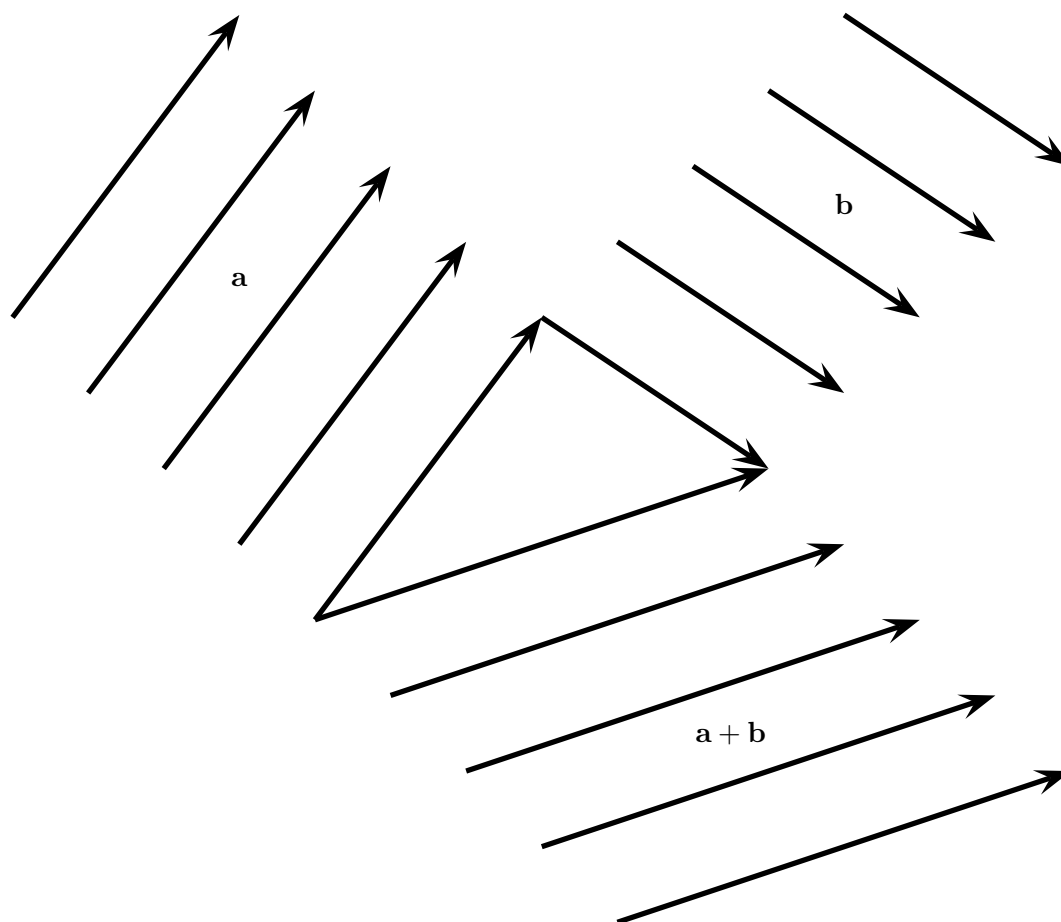


Figura 1.4: Para somar os deslocamentos \mathbf{a} e \mathbf{b} , escolhe-se um representante de \mathbf{a} e o representante de \mathbf{b} com ponto inicial no ponto final do representante de \mathbf{a} ; a seta cujo ponto inicial é o ponto inicial do representante de \mathbf{a} , e cujo ponto final é o ponto final do representante de \mathbf{b} , gera o deslocamento $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

qualquer de \mathbf{a} e um representante de \mathbf{b} com o mesmo ponto inicial, digamos \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} , respectivamente. Agora consideremos o paralelogramo de lados contíguos PA e PB . Nesse paralelogramo, seja C o vértice oposto ao vértice P . Com a diagonal PC podemos construir a seta \overrightarrow{PC} , que aponta da origem comum P para o vértice oposto. O vetor gerado por essa seta é a soma de \mathbf{a} com \mathbf{b} , isto é, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\overrightarrow{PC}]_{\sim}$. Essa regra para obter a soma de \mathbf{a} com \mathbf{b} é, por razões óbvias, conhecida como **regra do paralelogramo**. Ao usar a regra do triângulo para demonstrar a propriedade comutativa $A1$, deve ficar claro que essa propriedade é equivalente ao fato de que a regra do triângulo e a do paralelogramo dão o mesmo resultado para a soma de um par de vetores. A figura 1.5 é uma ilustração da regra do paralelogramo.

Agora, vamos definir uma operação que associa a um número real λ e a um deslo-

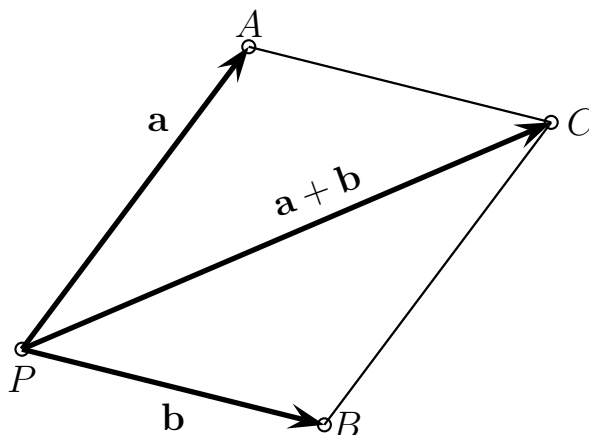


Figura 1.5: Para somar os deslocamentos \mathbf{a} e \mathbf{b} , tomamos representativos de \mathbf{a} e de \mathbf{b} com origem comum, completamos o paralelogramo que tem os representativos como lados contíguos e tomamos a seta que vai da origem comum ao vértice oposto do paralelogramo para gerar a soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ dos deslocamentos. Os símbolos dos vetores estão postos ao lado de suas respectivas setas representativas.

camento \mathbf{a} um novo deslocamento, que representaremos por $\lambda\mathbf{a}$,

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ &(\lambda, \mathbf{a}) \longmapsto \lambda\mathbf{a} . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Caso tenhamos $\lambda = 0$ ou $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ definimos $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Nos outros casos, por definição, $\lambda\mathbf{a}$ é um deslocamento com a mesma direção que \mathbf{a} , com módulo igual a $|\lambda||\mathbf{a}|$, com o mesmo sentido que \mathbf{a} se λ for positivo e sentido oposto se λ for negativo. Em qualquer caso, temos

$$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}| . \quad (1.8)$$

A operação (1.7) é chamada **multiplicação de um escalar por um deslocamento**, ou **dilatação** de um deslocamento (é claro que o significado coloquial de dilatação se restringe ao caso em que $\lambda > 1$). A palavra escalar é usada no presente contexto como sinônima de número real. Chamamos $\lambda\mathbf{a}$ **produto do escalar λ pelo deslocamento \mathbf{a}** . A dilatação de deslocamento goza das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{M1)} & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}} : \alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a} . \\ \text{M2)} & \forall \mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}} : 1\mathbf{a} = \mathbf{a} . \\ \text{AM1)} & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}} : (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a} . \\ \text{AM2)} & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \vec{\mathcal{E}} : \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Notemos que as propriedades A2 em (1.6) e M1 em (1.9) nos dispensam de usar os parênteses que nelas aparecem.

Temos em (1.5), (1.6), (1.7) e (1.9) que o conjunto dos deslocamentos $\vec{\mathcal{E}}$, munido das operações (1.5) e (1.7) forma um **espaço vetorial** real. Isto nos autoriza a chamar

os deslocamentos **vetores**. Para distinguí-los dos inúmeros outros vetores usados em física e matemática, podemos chamá-los **vetores-deslocamento**, ou **vetores de translação**. Dissemos que um deslocamento pode ser encarado como uma seta com módulo, direção e sentido fixados, mas cujo ponto de aplicação pode ser livremente escolhido. Por isso é comum chamar os vetores-deslocamento **vetores euclidianos livres**, para indicar que podem ser pensados como setas do Espaço Euclidiano, livres para serem transportadas paralelamente a si mesmas, em todo esse espaço. Quando não há perigo de confusão, os vetores-deslocamento são chamados, simplesmente, vetores.

Dado um vetor \mathbf{a} e um ponto P do espaço existe uma única seta aplicada em P que tem a direção, o comprimento e o sentido de \mathbf{a} . Esta seta tem um único ponto final, que denotaremos por $P + \mathbf{a}$. Deste modo, cada vetor \mathbf{a} define uma aplicação que faz corresponder a cada ponto P do espaço um único ponto $P + \mathbf{a}$,

$$\begin{aligned} &: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} , \\ &: P \longmapsto P + \mathbf{a} . \end{aligned} \tag{1.10}$$

Chamando de P' a imagem de P pela translação \mathbf{a} , obtemos

$$P' = P + \mathbf{a} . \tag{1.11}$$

Podemos pensar em \mathbf{a} como o agente que transporta de P até P' . Este modo de considerar \mathbf{a} está na origem do nome vetor (do latim *vector*, com significado de transportador). Tomamos (1.10) como definição da operação de adicionar um vetor a um ponto. Tal operação não deve ser confundida com a operação de adição de vetores e muito menos com a adição de números, apesar de usar-se o mesmo símbolo $+$ para representá-la. A operação de adição de um vetor a um ponto goza das propriedades

$$\text{T1) } \forall P \in \mathcal{E}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \vec{\mathcal{E}} : (P + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = P + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) .$$

T2) Para cada par ordenado $(P, Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ existe um único $\mathbf{a} \in V$ tal que

$$Q = P + \mathbf{a} . \tag{1.12}$$

Dado que o vetor \mathbf{a} é univocamente determinado pelo par (P, Q) podemos usar a seguinte notação, devida a Grassmann,

$$\mathbf{a} = Q - P . \tag{1.13}$$

Com esta notação a adição de vetores pode ser representada de forma muito sugestiva. Escrevendo $\mathbf{a} = B - A$ e $\mathbf{b} = C - B$, obtemos $\mathbf{a} + \mathbf{b} = C - A$, isto é,

$$(B - A) + (C - B) = C - A . \tag{1.14}$$

Essa equação nos fornece uma regra algébrica para somar vetores que é equivalente à regra geométrica do triângulo. A adição dos vetores com a notação de Grassmann está ilustrada na figura 1.6.

Agora, vamos escolher um ponto O do Espaço Euclidiano \mathcal{E} e associar a cada ponto P de \mathcal{E} o deslocamento de O até P . Esse deslocamento é o vetor livre $[\overrightarrow{OP}]_{\sim}$ que, em

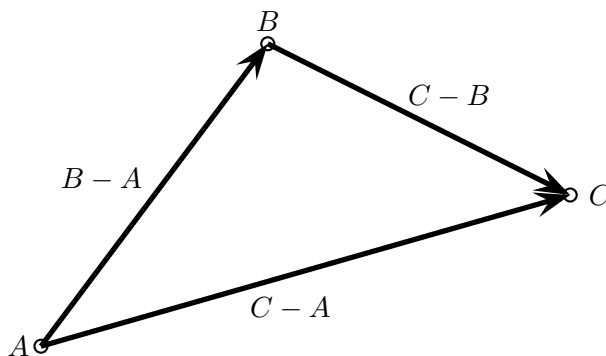


Figura 1.6: De acordo com Grassmann, vetores são diferenças entre pontos que são somadas de acordo com a regra algébrica $(B - A) + (C - B) = C - A$.

notação de Grassmann, se escreve $P - O$. Esse vetor é chamado **vetor-posição do ponto P relativo ao ponto O** e será denotado por \mathbf{r} . O vetor-posição do próprio ponto O relativo a O é, naturalmente, o vetor nulo $\mathbf{0}$. A correspondência entre os pontos do Espaço Euclidiano e os vetores-posição relativos a O é biunívoca. Ela é dada pela função bijetora

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_O : \mathcal{E} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, \\ &: P \longmapsto \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

que associa a cada ponto P o deslocamento a partir de O até P , isto é, o vetor-posição de P relativo a O . Temos

$$\mathbf{r} = \mathcal{D}_O(P) = [\overrightarrow{OP}]_{\sim} = P - O. \quad (1.16)$$

O ponto O escolhido é totalmente arbitrário. Podemos escolher um outro ponto qualquer O' e definir a função $\mathcal{D}_{O'}$ por meio de $\mathcal{D}_{O'}(P) = P - O'$, que também estabelece uma correspondência biunívoca entre \mathcal{E} e $\vec{\mathcal{E}}$. Nesse caso, $\mathbf{r}' = P - O'$ é o vetor-posição de P relativo ao ponto O' .

Definimos **diferença** entre um vetor \mathbf{a} e um vetor \mathbf{b} como sendo a soma de \mathbf{a} com o oposto de \mathbf{b} ; representando esta diferença por $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ temos, então,

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b}). \quad (1.17)$$

conforme ilustrado na figura 1.7. É fácil verificar que a diferença entre um vetor e outro é o vetor gerado pela seta que vai da extremidade final do último para a extremidade final do primeiro.

Usamos a mesma nomenclatura da aritmética e chamamos a operação que dá a diferença de **subtração** de vetores. Notemos que a subtração não é uma nova operação no espaço vetorial, mas apenas um tipo especial de adição.

Um tipo especial de dilatação de um vetor não-nulo \mathbf{a} consiste em multiplicá-lo pelo inverso de seu módulo; o vetor resultante tem módulo igual a 1 e é representado

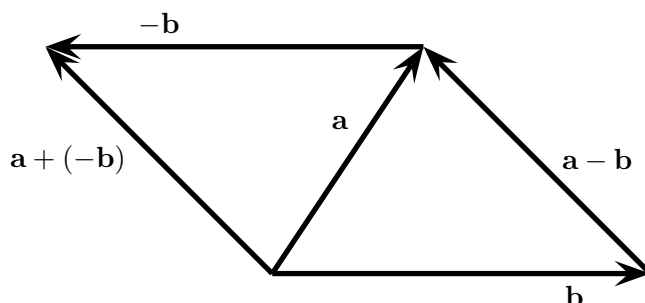


Figura 1.7: A diferença de vetores $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ é a soma $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, que é o vetor gerado pela seta que vai da extremidade final de \mathbf{b} para a extremidade final de \mathbf{a} .

por $\hat{\mathbf{a}}$, isto é,

$$\hat{\mathbf{a}} := \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}. \quad (1.18)$$

Qualquer vetor de módulo igual a 1 é chamado um **vetor unitário**. O vetor unitário, com a direção e sentido de um vetor não-nulo \mathbf{a} , é chamado **vetor unitário de \mathbf{a}** . Obviamente, o unitário de \mathbf{a} é o vetor $\hat{\mathbf{a}}$ definido em (1.18). Em manuscritos, escrevemos o vetor unitário de \vec{a} usando o circunflexo no lugar da seta que encima a letra. Assim, escrevemos: $\hat{a} := \vec{a}/a$.

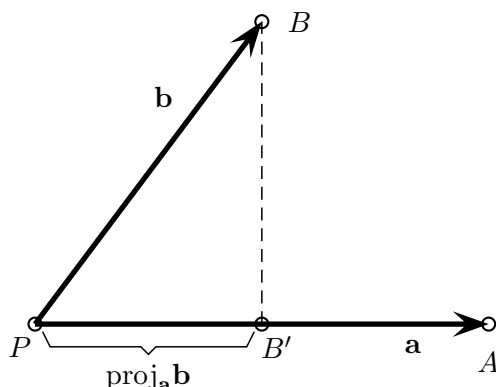
Estando bem compreendidos os conceitos anteriores torna-se conveniente simplificar nomenclatura e notação ou até mesmo cometer abusos de linguagem, como confundir um vetor com uma de suas setas representativas. Assim, nos referimos a \vec{PQ} como um vetor, ao invés de uma seta que gera o vetor $[\vec{PQ}]_{\sim}$. Por esse motivo é comum usar expressões como “vetor \mathbf{a} aplicado em um ponto P , ou com origem no ponto P ”, ao invés da expressão precisa “seta representativa do vetor \mathbf{a} com origem no ponto P ”. Pelo contexto devemos ser capazes de entender o real significado de tais expressões.

1.3 Produtos interno e externo de vetores

Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores não-nulos e consideremos suas respectivas setas representativas aplicadas em um mesmo ponto, digamos P . Sejam A e B os pontos finais das setas de \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente, conforme ilustrado na figura 1.8. Baixando de B uma perpendicular à reta suporte de \mathbf{a} , encontramos o ponto B' sobre esta reta e fica univocamente determinada a seta \vec{PB}' . Definimos **projeção escalar** do vetor \mathbf{b} ao longo do vetor \mathbf{a} como sendo o número real

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \begin{cases} |\vec{PB}'| & \text{se } \vec{PB}' \text{ tem o sentido de } \mathbf{a}, \\ -|\vec{PB}'| & \text{se } \vec{PB}' \text{ tem sentido oposto ao de } \mathbf{a} \text{ e} \\ 0 & \text{se } B' = P. \end{cases} \quad (1.19)$$

Se escolhessemos um outro ponto de aplicação P_1 e nele aplicássemos as setas $\vec{P_1A_1}$ e $\vec{P_1B_1}$, representativas de \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente, a perpendicular à reta suporte de

Figura 1.8: Projeção de \mathbf{b} ao longo de \mathbf{a} .

$\overrightarrow{P_1A_1}$ baixada de B_1 , encontraria nessa reta um ponto B'_1 tal que a seta $\overrightarrow{P_1B'_1}$ seria equipolente a $\overrightarrow{PB'}$. Por esse motivo, se substituíssemos em (1.19) P por P_1 e B' por B'_1 , não seria alterado o valor de $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Conseqüentemente, a projeção escalar de um vetor \mathbf{b} ao longo do vetor \mathbf{a} é um número que não depende do ponto de aplicação comum escolhido para as setas representativas de \mathbf{a} e \mathbf{b} . De fato, a projeção escalar depende apenas dos dois vetores envolvidos, o vetor \mathbf{a} que dá a direção ao longo da qual se projeta e o vetor \mathbf{b} projetado.

Os dois vetores aplicados em P definem duas semiretas PA e PB , que definem dois ângulos positivos no plano em que elas se encontram. Definimos **ângulo entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b}** , que denotamos por $\widehat{\mathbf{ab}}$, como sendo o ângulo entre as semiretas que é menor ou igual a um raso,

$$\widehat{\mathbf{ab}} = \widehat{APB} \quad (0 \leq \widehat{APB} \leq \pi). \quad (1.20)$$

Também aqui a mudança do ponto de aplicação comum das setas representativas não afetaria o valor que, pela definição, atribuímos ao ângulo entre os dois vetores.

Usando o conceito de ângulo entre dois vetores, a projeção escalar (1.19) pode ser escrita como

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos \widehat{\mathbf{ab}}. \quad (1.21)$$

No caso em que $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, definimos **projeção escalar de $\mathbf{0}$** , que escrevemos como $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{0}$, como sendo o número zero, *i.e.*,

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{0} = 0. \quad (1.22)$$

Portanto, com qualquer vetor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ podemos construir a função

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{a}} : \mathcal{E}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: \mathbf{b} \longmapsto \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

que chamamos, naturalmente, **função projeção escalar** ao longo de \mathbf{a} . O número $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ é positivo, nulo ou negativo, conforme o ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} seja menor, igual

ou maior do que um reto, respectivamente. Chamamos **funcional** uma função que transforma vetor em número. Obviamente, a função $\text{proj}_{\mathbf{a}}$ é um funcional dos vetores de $\vec{\mathcal{E}}$.

A função $\text{proj}_{\mathbf{a}}$ satisfaz às propriedades

$$\begin{aligned} \text{proj1)} \quad & \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{c} , \\ \text{proj2)} \quad & \text{proj}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} , \end{aligned} \quad (1.24)$$

para quaisquer $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \vec{\mathcal{E}}$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos como **linear** um funcional de vetores para o qual a imagem de uma soma de vetores é igual à soma das imagens dos vetores e a imagem de um produto de um número por um vetor é igual ao produto do número pela imagem do vetor. As propriedades (1.24) mostram que a projeção escalar é um funcional linear.

Conforme definimos, a projeção escalar de um vetor \mathbf{b} ao longo de um vetor \mathbf{a} é um número. Também podemos definir a chamada **projeção vetorial** de \mathbf{b} ao longo de \mathbf{a} , como sendo o vetor

$$\overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = [PB']_{\sim} . \quad (1.25)$$

Evidentemente, essa projeção vetorial é igual à projeção escalar $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ multiplicada pelo vetor unitário de \mathbf{a} ,

$$\overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}) \hat{\mathbf{a}} . \quad (1.26)$$

A projeção vetorial de \mathbf{b} ao longo de \mathbf{a} é também chamada componente vetorial de \mathbf{b} na direção de \mathbf{a} .

Definimos **função projeção vetorial** ao longo do vetor \mathbf{a} como sendo a função

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}} : \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ &: \mathbf{b} \longmapsto \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} , \end{aligned} \quad (1.27)$$

Uma função que transforma um vetor de um espaço vetorial em um vetor desse mesmo espaço vetorial é chamada **operador** sobre o espaço vetorial. Naturalmente, $\overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}$ é um operador sobre $\vec{\mathcal{E}}$. A projeção vetorial satisfaz às propriedades

$$\begin{aligned} \text{proj1)} \quad & \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{c} , \\ \text{proj2)} \quad & \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} , \end{aligned} \quad (1.28)$$

para quaisquer $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \vec{\mathcal{E}}$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Um operador cuja imagem da soma de qualquer par de vetores é igual à soma das imagens desses vetores, e cuja imagem do produto de qualquer número por qualquer vetor é igual ao produto do número pelo vetor, é chamado **operador linear**. Portanto, (1.28) é apenas a afirmação de que a projeção vetorial é um operador linear. Também temos, para qualquer vetor $\mathbf{b} \in \vec{\mathcal{E}}$, $\overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, *i.e.*,

$$\left(\overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\right)^2 = \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}} . \quad (1.29)$$

É comum nos referirmos à projeção escalar ou à projeção vetorial como, simplesmente, projeção, deixando que o contexto indique que se trata da escalar ou da vetorial.

Sejam dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Definimos **produto interno** de \mathbf{a} por \mathbf{b} , que denotamos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, como sendo o real 0 se um dos vetores é nulo e, nos demais casos,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}. \quad (1.30)$$

Comparando com a definição (1.21) de projeção, obtemos, imediatamente,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}. \quad (1.31)$$

É claro que o produto interno de dois vetores é nulo se, e somente se, algum dos vetores é nulo ou eles são ortogonais,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}. \quad (1.32)$$

É usual convencionar que o vetor nulo é um vetor perpendicular a qualquer vetor. Com isso, podemos dizer que o produto escalar de dois vetores é nulo se, e somente se, os vetores são ortogonais.

Definimos **multiplicação interna** como sendo a operação

$$\begin{aligned} \cdot : \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

O produto interno também é chamado **produto escalar**, devido ao fato de ser um escalar, isto é, um número. Com isso, a multiplicação interna é também chamada **multiplicação escalar**. Temos, para quaisquer \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} em $\vec{\mathcal{E}}$, e qualquer λ real

$$\begin{aligned} \text{MI1)} \quad &\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \\ \text{MI2)} \quad &(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \\ \text{MI3)} \quad &(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \text{MI4)} \quad &\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0; \text{ além disso } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Notemos que, usando a comutatividade MI1, obtemos de MI2 e MI3

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (1.35)$$

Essa última igualdade e MI3 mostram que os parênteses são desnecessários nas respectivas expressões.

As propriedades MI1, MI3 e MI4 são demonstradas diretamente da definição (1.30) de produto interno. A propriedade MI2 é obtida da propriedade proj1 em (1.24) por meio da relação (1.31) entre produto interno e projeção. Um espaço vetorial real, no qual é definido um produto (1.33) com as propriedades (1.34), é chamado **espaço vetorial euclidiano** (não confundir com o conjunto \mathcal{E} , que chamamos espaço euclidiano). Portanto, com a definição de produto interno (1.30), podemos dizer que $\vec{\mathcal{E}}$ é um espaço vetorial euclidiano.

É comum representar por \mathbf{a}^2 o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$,

$$\mathbf{a}^2 := \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.36)$$

Obtemos, então, diretamente da definição (1.30) $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$, isto é,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (1.37)$$

Também da definição (1.30) segue-se, de imediato,

$$\cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}} \quad (1.38)$$

Da relação (1.31) entre produto interno e projeção, temos

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.39)$$

Finalmente, usando $|\cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}| \leq 1$ em (1.38), obtemos a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**,

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|, \quad (1.40)$$

que também pode ser demonstrada usando-se apenas as propriedades algébricas em (1.34).

Nas operações de adição ou de multiplicação interna de dois vetores não se menciona nenhum ponto, vetor, direção, ou qualquer outro objeto geométrico fora da jazitura dos vetores somados. Sabemos que existe uma única direção perpendicular à uma jazitura, mas as operações de adição ou de multiplicação interna poderiam ser realizadas mesmo se houvesse mais de uma ou se não houvesse nenhuma. Na multiplicação de um número por um vetor não se menciona nenhum objeto geométrico fora da direção do vetor que é multiplicado por um número, de modo que nessa operação não depende de quantas são as jazituras perpendiculares a uma direção. O fato de que no Espaço Euclidiano \mathcal{E} existe uma única direção perpendicular a cada jazitura e uma única jazitura perpendicular a cada direção, caracteriza a dimensionalidade desse espaço. Dizemos que o Espaço Euclidiano é tridimensional. Portanto, podemos afirmar que as operações até agora definidas para os vetores, adição, multiplicação por um escalar e multiplicação interna, independem da dimensionalidade do Espaço Euclidiano. Agora definiremos uma operação com vetores na qual a tridimensionalidade de \mathcal{E} desempenha um papel essencial.

Sejam dois vetores não-nulos \mathbf{a} e \mathbf{b} , com representativos aplicados em um ponto P do espaço \mathcal{E} . Suas retas suportes inteceptam-se em P e determinam um plano se, e somente se, \mathbf{a} e \mathbf{b} não forem paralelos. Primeiramente, vamos supor que seja esse o caso. Suas setas representativas não são colineares e, portanto, elas formam dois lados de um paralelogramo que chamamos **paralelogramo formado pelos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b}** , conforme ilustrado na figura 1.9. Denotamos por $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ a área desse paralelogramo, que pode ser usada como um número que avalia o não-paralelismo de \mathbf{a} e \mathbf{b} . Naturalmente, $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ e

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}. \quad (1.41)$$

Os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} não são paralelos se, e somente se, $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Há uma única direção perpendicular ao plano determinado pelos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , que também

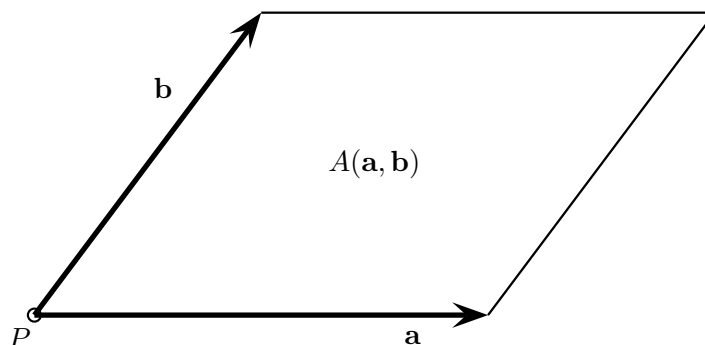


Figura 1.9: Área $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ do paralelogramo formado por \mathbf{a} e \mathbf{b} .

chamamos **direção perpendicular** ao próprios vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Se esses vetores também determinassem univocamente um sentido ao longo dessa direção perpendicular a eles, teríamos como definir, imediatamente, um novo vetor a partir de \mathbf{a} e \mathbf{b} . Seria um vetor com esse sentido na direção perpendicular aos dois vetores, e com módulo igual à área do paralelogramo formado por eles. Acontece que isso é impossível; o par de vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} não é capaz de determinar um único sentido na direção perpendicular a eles. Para isso, é necessário dotar $\vec{\mathcal{E}}$ de um propriedade suplementar que chamamos orientação. Com esse fim, comecemos por definir $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $\mathbf{n}_-(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ como sendo os dois unitários possíveis na direção perpendicular a \mathbf{a} e \mathbf{b} ; qual deles é $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e qual é $\mathbf{n}_-(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é questão de convenção. Digamos que $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tem o sentido dado pela seguinte convenção: uma pessoa com os pés na origem comum dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , e com a cabeça apontando no sentido de $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, veria o ângulo $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ ser varrido da direita para a esquerda, caso ele seja varrido de \mathbf{a} para \mathbf{b} (não nos esqueçamos que $0 < \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} < \pi$ no caso em discussão). O sentido atribuído a $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ por essa regra é dito **sentido dextrógiro** e a convenção que lhe deu origem é chamada **regra dextrógira**. Esse é o sentido em que um parafuso deve apontar a fim de avançar ao ser girado de um ângulo $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ de \mathbf{a} para \mathbf{b} ; esse critério para determinar o sentido dextrógiro pelo torcer de um parafuso é chamado **regra do parafuso**. Em uma outra regra, usa-se a mão direita inicialmente espalmada e com o polegar esticado e perpendicular aos outros dedos. Se esses estiverem esticados apontando na direção e sentido do primeiro vetor \mathbf{a} , e se encurvarem varrendo o ângulo $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ no sentido de \mathbf{a} para \mathbf{b} , então o polegar estará apontando no sentido dextrógiro, que, por definição, é o sentido de $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Essa regra para determinar o sentido dextrógiro é chamada **regra da mão direita**. Dado que o sentido de $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é, por definição, o dextrógiro, diremos que o sentido de $\mathbf{n}_-(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é o **levógiro**. Os dois sentidos estão ilustrados na figura 1.10. Naturalmente, $\mathbf{n}_+(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{n}_-(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{n}_-(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

Vamos escolher o sentido dextrógiro para determinar o vetor que tem direção perpendicular a \mathbf{a} e \mathbf{b} e módulo igual à área $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dada em (1.41). Ele será chamado **produto vetorial** de \mathbf{a} por \mathbf{b} e, denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Temos, então,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}) \mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (1.42)$$

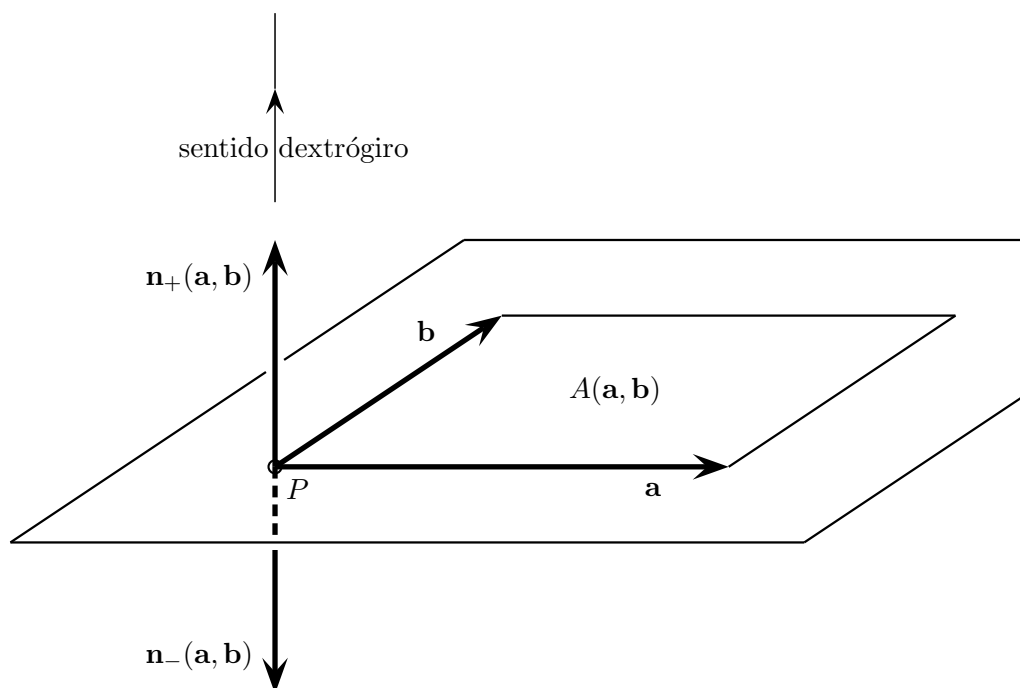


Figura 1.10: Sentido dextrógiro de $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e levógiro de $\mathbf{n}_-(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Essa definição foi feita para o caso em que \mathbf{a} e \mathbf{b} não são nulos e nem paralelos. Para \mathbf{a} e \mathbf{b} nulos ou paralelos definimos $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como sendo o vetor nulo,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}. \quad (1.43)$$

É comum considerar o vetor nulo como um vetor que é paralelo a qualquer vetor. Com isso, podemos dizer que o produto vetorial de dois vetores é nulo se, e somente se, os vetores são paralelos.

Poderíamos também definir o produto vetorial usando em (1.42) o unitário $\mathbf{n}_-(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ no lugar de $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. A escolha de um dos unitários, $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ou $\mathbf{n}_-(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, para definir o produto vetorial é matéria de convenção e dota o espaço $\vec{\mathcal{E}}$ com o que chamamos uma **orientação**. Tal orientação é dita **positiva**, ou dextrógira, se for $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ o escolhido e **negativa**, ou levógira, se o for $\mathbf{n}_-(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Com (1.42) escolhemos dotar $\vec{\mathcal{E}}$ de orientação positiva.

Definimos **multiplicação externa, ou vetorial**, como sendo a operação

$$\begin{aligned} \times : \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ &: (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Para facilitar o estudo do produto vetorial de dois vetores, podemos considerá-lo como uma seqüência de três operações realizadas no segundo vetor por meio do primeiro. Na primeira operação obtém-se a componente vetorial do segundo vetor em um plano ortogonal ao primeiro. Na segunda, essa componente vetorial é rodada de

um ângulo reto em torno do primeiro vetor. Na terceira, essa componente rodada é multiplicada pelo módulo do primeiro vetor. Passemos, agora, à descrição detalhada dessas operações.

Sejam dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , com $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Consideremos com origem comum no ponto P as setas \vec{PA} e \vec{PB} , representativas dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente. Seja também o plano perpendicular a \mathbf{a} que passa por P , conforme indicado na figura 1.11. A

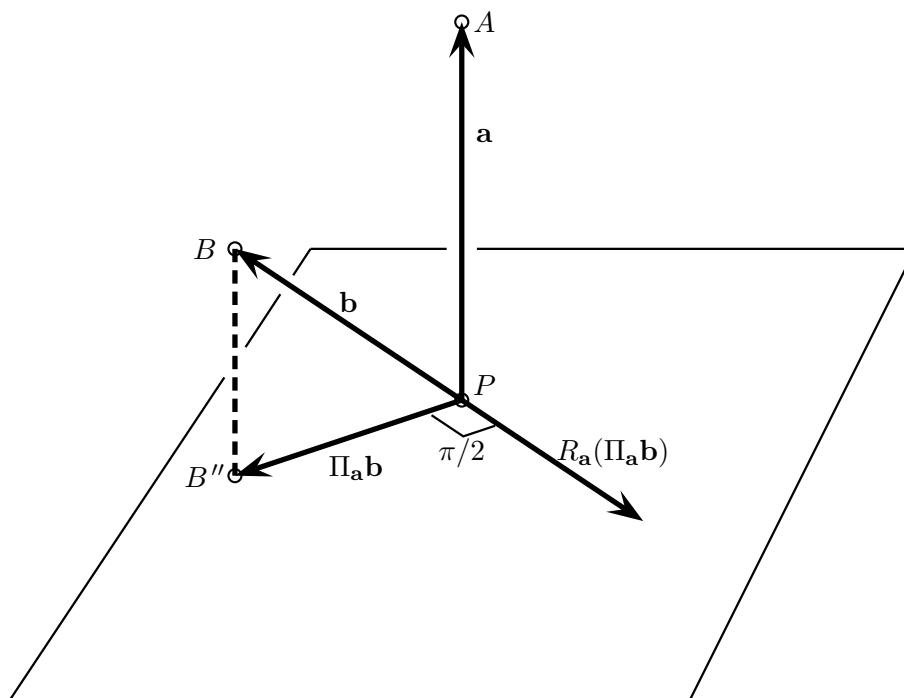


Figura 1.11: A projeção vetorial de \mathbf{b} no plano perpendicular a \mathbf{a} é o vetor $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$; rodando essa projeção de um ângulo reto em torno de \mathbf{a} , obtém-se o vetor $R_{\mathbf{a}}(\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b})$.

perpendicular a esse plano, baixada do ponto final B da seta representativa de \mathbf{b} , encontra o plano em um único ponto, que chamaremos B'' . Com isso, fica univocamente determinada a seta $\vec{PB''}$, que vai da origem comum P até o pé B'' da perpendicular. Essa seta $\vec{PB''}$ será chamada projeção da seta \vec{PB} no plano perpendicular à seta \vec{PA} . O vetor gerado pela seta projetada $\vec{PB''}$ será chamado **projeção vetorial do vetor \mathbf{b} na jazitura ortogonal ao vetor \mathbf{a}** , e será representado por $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$,

$$\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = [\vec{PB''}]_{\sim} . \quad (1.45)$$

Notemos, com atenção, que o vetor obtido $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ não depende do ponto P tomado como origem das setas representativas de \mathbf{a} e \mathbf{b} e, portanto, do plano ortogonal a \mathbf{a} no qual fazemos as projeções das setas representativas. Tomando outro ponto P_1 e setas representativas $\vec{P_1A_1}$ e $\vec{P_1B_1}$ para os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente, obteríamos como projeção da seta $\vec{P_1B_1}$ no plano ortogonal à seta $\vec{P_1A_1}$ uma seta $\vec{P_1B_1''}$ equipolente à

seta \overrightarrow{PB} . Com isso, o vetor gerado por $\overrightarrow{P_1B_1}$ seria o mesmíssimo vetor gerado por \overrightarrow{PB} . Na verdade, a projeção vetorial $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ depende apenas do vetor \mathbf{a} que define a jazitura em que se projeta o vetor \mathbf{b} e do próprio vetor \mathbf{b} . Por isso dissemos que $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ é uma projeção na jazitura perpendicular a \mathbf{a} , pois não importa qual plano com essa jazitura é utilizado na obtenção de $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. No entanto, podemos tomar a liberdade de nos referir a $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ como projeção de \mathbf{b} em um plano ortogonal a \mathbf{a} , desde que esteja claro que não é importante o particular plano em consideração, mas apenas a sua jazitura.

Notemos que $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ é um vetor no plano de \mathbf{a} e \mathbf{b} , perpendicular a \mathbf{a} , e com módulo igual ao produto do módulo de \mathbf{b} pelo cosseno do ângulo que \mathbf{b} faz com o plano ortogonal a \mathbf{a} . Esse ângulo é o complemento de $\widehat{\mathbf{ab}}$, de modo que

$$|\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}| = |\mathbf{b}| \sin \widehat{\mathbf{ab}}. \quad (1.46)$$

O processo de projetar um vetor no plano ortogonal a \mathbf{a} define a função

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{a}} : \mathcal{E}^{\rightarrow} &\longrightarrow \mathcal{E}^{\rightarrow} \\ &: \mathbf{b} \longmapsto \Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

que é linear, isto é, para quaisquer vetores \mathbf{b} e \mathbf{c} , e qualquer número real λ ,

$$\begin{aligned} \text{II1)} \quad \Pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{c}. \\ \text{II2)} \quad \Pi_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) &= \lambda\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Portanto, $\Pi_{\mathbf{a}}$ é um operador linear sobre o espaço vetorial $\mathcal{E}^{\rightarrow}$. A demonstração de II1 consiste em mostrar que as projeções $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ e $\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$ formam um paralelogramo no plano perpendicular a \mathbf{a} cuja diagonal é a projeção $\Pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$. A demonstração de II2 não apresenta nenhuma dificuldade.

Uma propriedade muito útil da projeção vetorial de \mathbf{b} no plano ortogonal a \mathbf{a} é que essa projeção pode substituir \mathbf{b} no produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}. \quad (1.49)$$

Vale a seguinte relação entre a projeção vetorial de um vetor \mathbf{b} ao longo de um vetor \mathbf{a} e a projeção vetorial de \mathbf{b} na jazitura ortogonal a \mathbf{a} ,

$$\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b} - \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}, \quad (1.50)$$

que também pode ser escrita na forma

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}, \quad (1.51)$$

na qual

$$\mathbf{b}_{\parallel} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b})\hat{\mathbf{a}} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_{\perp} = \Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}. \quad (1.52)$$

A relação (1.51) tem um significado geométrico simples: qualquer vetor \mathbf{b} pode ser escrito como a soma de duas componentes vetoriais perpendiculares entre si, uma paralela e a outra perpendicular ao vetor não-nulo \mathbf{a} ; a componente paralela é obtida

por meio da projeção de \mathbf{b} ao longo de \mathbf{a} e a perpendicular é a projeção vetorial de \mathbf{b} na jazitura ortogonal a \mathbf{a} .

Agora, consideremos uma projeção vetorial $\mathbf{b}_\perp = \Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ não-nula. Seja \mathbf{b}'_\perp um vetor no mesmo plano perpendicular a \mathbf{a} , com o mesmo módulo que \mathbf{b}_\perp , direção perpendicular a de \mathbf{b}_\perp e com o sentido de $\mathbf{n}_+(\mathbf{a}, \mathbf{b}_\perp)$. Naturalmente, existe um único vetor \mathbf{b}'_\perp com essas características, e a operação que transforma \mathbf{b}_\perp em \mathbf{b}'_\perp é o que chamamos **rotação de $\pi/2$ em torno do vetor \mathbf{a}** e representamos por $R_{\mathbf{a}}$. Essa operação, por definição, transforma o vetor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\parallel + \mathbf{b}_\perp$ no vetor $\mathbf{b}' = \mathbf{b}_\parallel + \mathbf{b}'_\perp$. Já no caso em que $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{0}$, podemos definir $R_{\mathbf{a}}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $R_{\mathbf{a}}\mathbf{b}_\parallel = \mathbf{b}_\parallel$, que significa que os vetores paralelos a \mathbf{a} não são afetados pela rotação $R_{\mathbf{a}}$. Temos, pois, a função

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{a}} : \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ &: \mathbf{b} \longmapsto R_{\mathbf{a}}\mathbf{b} , \end{aligned} \quad (1.53)$$

Temos para quaisquer vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} e qualquer número real λ ,

$$\begin{aligned} R1) \quad R_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= R_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + R_{\mathbf{a}}\mathbf{c} , \\ R2) \quad R_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) &= \lambda R_{\mathbf{a}}\mathbf{b} , \end{aligned} \quad (1.54)$$

ou seja, $R_{\mathbf{a}}$ é um operador linear sobre o espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$. A demonstração de $R1$ consiste em mostrar que a soma vetorial dos vetores $R_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ e $R_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$, obtidos pela rotação de \mathbf{b} e \mathbf{c} , respectivamente, é igual ao resultado da rotação de $\mathbf{b} + \mathbf{c}$. A demonstração de $R2$ não apresenta dificuldades.

Finalmente, seja a operação denotada por $D_{\mathbf{a}}$, que consiste em multiplicar qualquer vetor pelo módulo de um dado vetor \mathbf{a} ,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{a}} : \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ &: \mathbf{b} \longmapsto |\mathbf{a}|\mathbf{b} . \end{aligned} \quad (1.55)$$

É trivial mostrar que o operador $D_{\mathbf{a}}$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} D1) \quad D_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= D_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + D_{\mathbf{a}}\mathbf{c} , \\ D2) \quad D_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) &= \lambda D_{\mathbf{a}}\mathbf{b} . \end{aligned} \quad (1.56)$$

para quaisquer vetores \mathbf{b} e \mathbf{c} e qualquer escalar λ .

Agora é fácil de chegar ao resultado prometido. O produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é obtido aplicando-se sobre \mathbf{b} a seqüência das três operações, definidas em (1.47)(1.53) e (1.55),

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = D_{\mathbf{a}}R_{\mathbf{a}}\Pi_{\mathbf{a}}\mathbf{b} . \quad (1.57)$$

Munidos dessa última identidade, estamos prontos para obter várias propriedades fundamentais do produto vetorial (1.44). Temos, para quaisquer vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} e qualquer número real λ ,

$$\begin{aligned} \text{ME1)} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} , \\ \text{ME2)} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} , \\ \text{ME3)} \quad (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) . \\ \text{ME4)} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &+ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (1.58)$$

Notemos que, usando-se ME1, ME2 e ME3, obtém-se, imediatamente,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (1.59)$$

A propriedade ME1 é consequência imediata da definição (1.42) de produto vetorial e a propriedade ME2 demonstra-se com o auxílio de (1.57). Já ME3 é demonstrada facilmente a partir da definição (1.42) ou da relação (1.57). Finalmente, ME4 pode ser demonstrada pelo seguinte procedimento metódico. Definimos uma função J de três variáveis vetoriais por meio de $J(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$. Então, demonstramos que J é linear em suas três variáveis, isto é, para a primeira variável temos $J(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = J(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + J(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ e $J(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda J(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, e para a segunda e terceira variáveis, expressões análogas. A seguir, demonstramos que J é antissimétrica, isto é, transpor um par de variáveis da função J tem o efeito de mudar apenas o sinal do valor da função; por exemplo, $J(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -J(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$. Dessas propriedades decorre que o valor de J é nulo se duas de suas variáveis são vetores paralelos. De posse dessas propriedades podemos escrever $J(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = J(\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}')$, onde \mathbf{b}' e \mathbf{c}' são vetores perpendiculares entre si e ao vetor \mathbf{a} . A partir daí é trivial chegar em ME4.

A propriedade ME1 é descrita dizendo-se que o produto vetorial é **anti-simétrico** e ME4 é chamada **identidade de Jacobi**. A propriedade ME2 e a primeira equação em (1.59) afirmam que a multiplicação externa é distributiva em relação à adição de vetores.

1.4 Bases e componentes de vetores

Em nosso estudo sobre o produto vetorial caracterizamos a tridimensionalidade de \mathcal{E} pela propriedade de que existe uma única direção perpendicular a uma dada jazitura e vice-versa. Vamos caracterizar agora a tridimensionalidade de $\vec{\mathcal{E}}$ usando o conceito de base de um espaço vetorial. Na verdade, a dimensionalidade do Espaço Euclidiano \mathcal{E} e a do espaço vetorial de deslocamentos $\vec{\mathcal{E}}$ são dois conceitos essencialmente relacionados.

Sejam \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 três vetores não-nulos e que não têm a mesma jazitura, isto é, suas setas representativas com origem comum não são coplanares. Para expressar o fato de que não têm a mesma jazitura é comum dizer os próprios três vetores não são coplanares. Agora, veremos que qualquer vetor \mathbf{a} pode ser escrito como a soma de três vetores paralelos a \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , respectivamente, ou seja, qualquer $\mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}}$ tem a forma

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \quad (a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}). \quad (1.60)$$

De fato, consideremos as setas representativas dos vetores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , e do vetor arbitrário \mathbf{a} , todas aplicadas em um mesmo ponto P . Usaremos o fato de que os vetores não-nulos \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 não são coplanares para fazer a construções geométricas que seguem. Seja A a extremidade final da seta de \mathbf{a} , isto é, $\mathbf{a} = A - P$. Por A traçamos uma paralela a \mathbf{e}_3 ; ela encontra o plano determinado pelas setas de \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 em um único ponto bem determinado, que denotaremos por B . Obviamente, $A - B$ é um vetor que pode ser escrito na forma $a_3 \mathbf{e}_3$, para algum número real a_3 . Por B

traçamos uma paralela a \mathbf{e}_2 ; ela encontra a reta suporte da seta de \mathbf{e}_1 em um único ponto bem determinado, que denotaremos por C . Temos $B - C = a_2\mathbf{e}_2$ para algum real a_2 . Finalmente, também temos $C - P = a_1\mathbf{e}_1$ para algum real a_1 . Recolhendo os resultados dessas construções geométricas, obtemos

$$\mathbf{a} = A - P = (A - B) + (B - C) + (C - P) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad (1.61)$$

conforme afirmado em (1.60). A figura 1.12 ilustra uma situação em que a_1 , a_2 e a_3 são positivos.

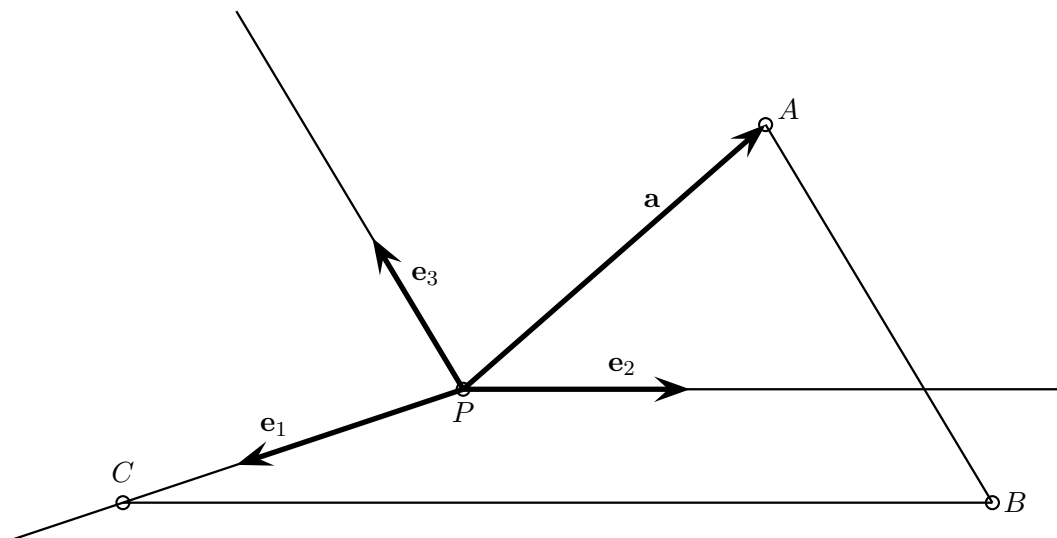


Figura 1.12: $\mathbf{a} = A - P = (A - B) + (B - C) + (C - P)$.

Tomando $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ em (1.60), obtemos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Reciprocamente, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ somente se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, como decorrência de \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 não serem nulos e nem coplanares. De fato, suponhamos que $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. Temos que \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 não são nulos e têm direções diferentes, pois se tivessem a mesma direção teríamos \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 coplanares, contrariamente à hipótese. Portanto, \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 determinam um plano. Se $a_3 \neq 0$, obtemos de $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ que $\mathbf{e}_3 = (-a_1/a_3)\mathbf{e}_1 + (-a_2/a_3)\mathbf{e}_2$. Mas, nesse caso, teríamos \mathbf{e}_3 no plano de \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , o que é absurdo, pois esses vetores não são coplanares. Consequentemente, $a_3 = 0$ e, portanto, $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$. Se $a_2 \neq 0$, $\mathbf{e}_2 = (-a_1/a_2)\mathbf{e}_1$ e \mathbf{e}_2 estaria na direção de \mathbf{e}_1 , o que sabemos, por hipótese, não ocorrer; logo, $a_2 = 0$ e ficamos com $a_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$. Como, por hipótese, \mathbf{e}_1 é não-nulo, obtemos $a_1 = 0$. Fica demonstrado que $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Uma soma de produtos de números por vetores é chamada **combinação linear de vetores** e cada número da combinação é chamado **coeficiente do vetor** que ele está multiplicando, ou **coeficiente da combinação linear**. Se a única combinação linear nula de um conjunto de vetores é aquela em que todos os coeficientes da combinação são nulos, então os vetores são ditos **linearmente independentes**. Portanto, a

propriedade que acabamos de demonstrar é que, se os vetores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 são não-nulos e não-coplanares, então

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad (1.62)$$

isto é, eles são linearmente independentes. Dois vetores de $\vec{\mathcal{E}}$ são linearmente independentes se, e somente se, não são nulos e nem colineares. Um único vetor de $\vec{\mathcal{E}}$ é linearmente independente se, e somente se, é não-nulo.

Se qualquer vetor de um subconjunto de um espaço vetorial pode ser escrito como combinação linear de certos vetores, dizemos que esses vetores varrem o subconjunto. Já havíamos demonstrado (1.60), isto é, que qualquer vetor de $\vec{\mathcal{E}}$ pode ser escrito como um combinação linear dos vetores, não-nulos e não coplanares, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 . Portanto, podemos dizer que \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 varrem o espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$ inteiro. Um conjunto linearmente independentes de vetores que varrem o espaço vetorial é chamado de **base do espaço vetorial**. Usando essa definição, podemos afirmar que três vetores de $\vec{\mathcal{E}}$, não-nulos e não-coplanares, formam uma base de $\vec{\mathcal{E}}$. É fácil mostrar que toda base de $\vec{\mathcal{E}}$ têm exatamente 3 elementos. Na verdade, em qualquer espaço vetorial todas as bases têm o mesmo número de elementos e esse número é chamado **dimensão do espaço vetorial**. Temos, pois, que $\vec{\mathcal{E}}$ tem dimensão 3 ou, com também se diz, $\vec{\mathcal{E}}$ é tridimensional. É fácil verificar que um subconjunto de $\vec{\mathcal{E}}$ varrido por dois vetores linearmente independentes é um espaço vetorial de dimensão 2, também dito bidimensional. Um subconjunto de $\vec{\mathcal{E}}$ varrido por um vetor não-nulo é um espaço vetorial de dimensão 1, também dito unidimensional.

Entre \mathcal{E} e $\vec{\mathcal{E}}$ existe a correspondência biunívoca (1.15). Devido a ela, diz-se também que \mathcal{E} tem a dimensão de $\vec{\mathcal{E}}$, isto é, \mathcal{E} é tridimensional.

Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base de $\vec{\mathcal{E}}$ e \mathbf{a} um vetor qualquer de $\vec{\mathcal{E}}$. Existem números a_1 , a_2 e a_3 tais que $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$. Usando-se o fato de que \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 são linearmente independentes, demonstra-se que não há outra trinca de números com essa propriedade, isto é, se $\mathbf{a} = a'_1 \mathbf{e}_1 + a'_2 \mathbf{e}_2 + a'_3 \mathbf{e}_3$, então $a'_1 = a_1$, $a'_2 = a_2$ e $a'_3 = a_3$. Esses coeficientes a_1 , a_2 e a_3 são chamados **componentes escalares** do vetor \mathbf{a} na base \mathcal{B} . Dizemos que a_1 é a componente escalar de \mathbf{a} ao longo do vetor \mathbf{e}_1 , a_2 , ao longo de \mathbf{e}_2 e a_3 , ao longo de \mathbf{e}_3 . Lembremo-nos que já havíamos chamado componentes vetoriais de um vetor \mathbf{a} àqueles vetores que somados dão \mathbf{a} . A relação entre os dois conceitos é simples. Se $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, então $a_1 \mathbf{e}_1$, $a_2 \mathbf{e}_2$ e $a_3 \mathbf{e}_3$ são componentes vetoriais de \mathbf{a} , enquanto a_1 , a_2 e a_3 são as componentes escalares de \mathbf{a} na base \mathcal{B} . É comum nos referirmos às componentes escalares, simplesmente, como componentes. O processo pelo qual obtemos a expressão $a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ para o vetor \mathbf{a} , em termos dos vetores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 da base, é chamado **decomposição** ou **expansão do vetor na base** considerada.

Observemos que o módulo da componente vetorial é igual ao módulo da correspondente componente escalar se, e somente se, o vetor da base correspondente é unitário. Por exemplo, $|a_1 \mathbf{e}_1| = |a_1| |\mathbf{e}_1|$, que é igual ao módulo $|a_1|$ da componente escalar ao longo de \mathbf{e}_1 se, e somente se, $|\mathbf{e}_1| = 1$.

É fácil verificar que dois vetores são iguais se, e somente se, são iguais suas respectivas componentes em uma mesma base. Assim, obtemos para $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$

e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2 \quad \text{e} \quad a_3 = b_3. \quad (1.63)$$

Com igual facilidade se obtém que, em uma dada base, cada componente da soma de dois vetores é igual à soma das respectivas componentes dos vetores, e que cada componente do produto de um escalar por um vetor é igual ao produto do escalar pela respectiva componente do vetor. Temos, pois, para vetores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$ e um escalar λ ,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \iff c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2 \quad \text{e} \quad c_3 = a_3 + b_3 \quad (1.64)$$

e

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} \iff c_1 = \lambda a_1, \quad c_2 = \lambda a_2 \quad \text{e} \quad c_3 = \lambda a_3. \quad (1.65)$$

Usaremos, freqüentemente, o símbolo de somatório para indicar somas. Assim, a expressão geral (1.60) de um vetor em termos de uma base será escrita

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i. \quad (1.66)$$

Para economia de tempo e espaço, pode-se usar a **convenção de Einstein**: índices repetidos em um produto subentendem um símbolo de somatório para eles. Por exemplo, em (1.66) o índice i está repetido no produto $a_i \mathbf{e}_i$ e, portanto, o símbolo de somatório que indica a soma, de $i = 1$ até $i = 3$, pode ficar subtendido se usarmos a convenção de Einstein. Com essa convenção, (1.66) toma a forma

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i. \quad (1.67)$$

De acordo com a convenção de Einstein $a_i \mathbf{e}_j$ significa um único termo, o produto de uma componente bem específica por um vetor bem específico, da i -ésima componente pelo j -ésimo vetor da base. Já $a_i \mathbf{e}_i$ significa a soma de três produtos, obtidos fazendo-se i varrer o conjunto $\{1, 2, 3\}$, isto é, $a_i \mathbf{e}_i = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$. Notemos que a repetição de índices que implica em soma tem que ocorrer em um produto. Desse modo, em $a_i + b_i$ não está subentendida nenhuma soma, pois o índice i não está repetido em um produto, mas na soma de a_i com b_i . Nesse caso, i mantém o seu significado de um valor genérico, que pode ser 1, 2 ou 3, mas sem nenhuma soma subentendida sobre esses valores. Já sabemos que esses índices simbolizando valores genéricos também são úteis para abreviar expressões. Assim, no lugar de (1.63), (1.64) e (1.65) podemos escrever

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_i = b_i, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \iff c_i = a_i + b_i \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} \iff c_i = \lambda a_i. \quad (1.68)$$

É conveniente estabelecer uma ordem nos vetores de uma base. Dada uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ podemos formar com seus vetores uma trinca ordenada que chamamos **base ordenada**. Podemos, por exemplo, formar a trinca ordenada usando a própria ordem dos índices que numeram os vetores da base; obtemos a base ordenada $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Uma outro exemplo de base ordenada seria $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Escolhendo uma ordem para

os vetores da base, podemos usá-la também para as componentes de um vetor nessa base. Assim, se $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e consideramos a base ordenada $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, podemos formar a trinca ordenada de componentes (a_1, a_2, a_3) , na mesma ordem usada para os vetores da base. Sempre que nos referirmos à trinca ordenada de componentes do vetor, estaremos entendendo que a ordem é a mesma usada na base. Com a idéia de ordenação de componentes podemos dizer que, dada uma base ordenada no espaço vetorial, a cada vetor corresponde uma única trinca ordenada de componentes, e vice-versa. Temos pois que uma base estabelece uma correspondência biunívoca entre os vetores de $\vec{\mathcal{E}}$ e as trincas de \mathbb{R}^3 .

Uma base é dita **normal** se todos os seus vetores são unitários, e é dita **ortogonal** se seus vetores são ortogonais dois a dois. Uma base que é ortogonal e normal é chamada **base ortonormal**. As bases ortonormais são particularmente úteis, essencialmente porque nelas cada componente escalar de um vetor é dada pela projeção do vetor ao longo do correspondente unitário, como demonstraremos mais adiante. Mais especificamente, a i -ésima componente a_i do vetor \mathbf{a} na base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ é dada por

$$a_i = \text{proj}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{a} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.69)$$

onde foi usada a relação (1.39). A propriedade (1.69) está ilustrada na figura 1.13, na qual as componentes de um vetor $\mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}}$ estão indicadas como sendo as respectivas projeções ao longo dos vetores da base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. A demonstração

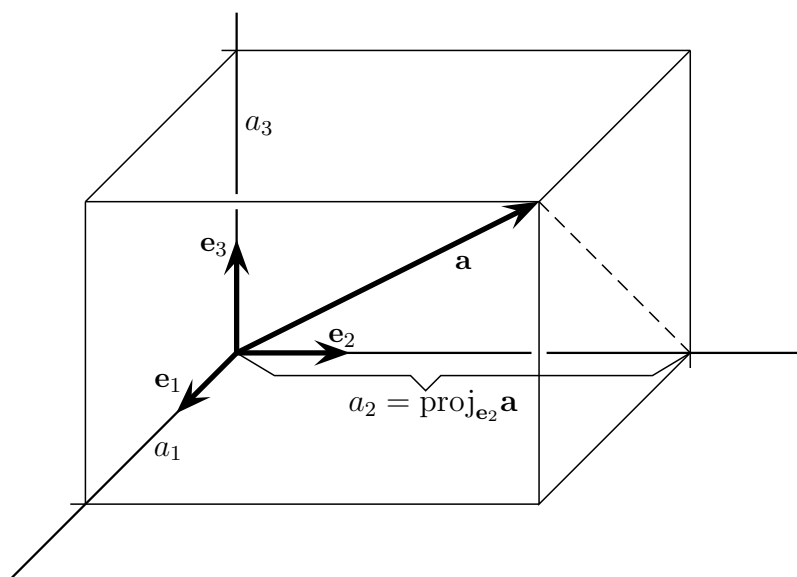


Figura 1.13: As projeções a_1 , a_2 e a_3 de \mathbf{a} , ao longo dos respectivos vetores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , estão indicadas nas retas suportes das setas representativas desses vetores. De acordo com a construção ilustrada na figura 1.12, essas projeções são as respectivas componentes do vetor \mathbf{a} .

de (1.69) pode ser feita geometricamente, com o auxílio da figura 1.13. No entanto,

quando trabalhamos com bases, particularmente com as ortonormais, é mais prático obter os resultados algebricamente. Uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é definida algebricamente pelas relações

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.70)$$

onde usamos o chamado **delta de Kronecker**, definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (1.71)$$

Fazendo o produto escalar de \mathbf{e}_i por ambos os membros da igualdade $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^3 a_j \mathbf{e}_j$, usando as propriedades MI2 e MI3 em (1.34), a ortonormalidade (1.70) da base, e a definição de delta de Kronecker, obtemos

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}_i \cdot \sum_{j=1}^3 a_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 a_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{ij} = a_i \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.72)$$

como afirmado em (1.69).

Se $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j$, temos a igualdade

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \quad (1.73)$$

que dá o produto escalar de dois vetores em termos de suas componentes. Usando esse resultado em (1.37) obtemos a expressão do módulo de um vetor em termos de suas componentes,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.74)$$

De (1.38) obtemos a expressão do ângulo entre dois vetores em termos de suas componentes,

$$\cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (1.75)$$

Em uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ temos, obrigatoriamente, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \pm \mathbf{e}_3$. Considerando bases para as quais $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, obtemos

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.76)$$

onde usamos o chamado **símbolo de Levi-Civita**, definido por

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é permutação par de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é permutação ímpar de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{se há repetição de índices.} \end{cases} \quad (1.77)$$

Naturalmente, ε_{ijk} troca de sinal em qualquer transposição de índices e não troca em qualquer de suas permutações cíclicas.

Se $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j$, temos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k, \quad (1.78)$$

que é a expressão do produto vetorial de dois vetores em termos de suas componentes. Nessa expressão, podemos bem apreciar as vantagens que teríamos se usássemos a convenção de Einstein.

Dado que o produto vetorial de dois vetores é um vetor, podemos usá-lo para fazer um produto escalar ou vetorial por um terceiro vetor. Primeiramente, consideremos o chamado **produto misto de três vetores** \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e definido como sendo o número

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (1.79)$$

Esse produto tem uma propriedade fundamental que decorre imediatamente de sua definição: ele é nulo se dois quaisquer de seus vetores são paralelos; em particular, ele é nulo se dois quaisquer de seus vetores são iguais. Temos portanto que, para quaisquer três vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , é nulo o produto $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c})$, que expandido nos leva a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad (1.80)$$

isto é, no produto misto podemos permutar os símbolos das multiplicações escalar e vetorial. Dessa propriedade obtemos a invariância do produto misto sob permutações cíclicas dos vetores,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.81)$$

Com essa propriedade obtemos, facilmente, que o produto misto é antissimétrico, isto é, troca de sinal ao transpormos nele qualquer par de vetores. Também é fácil verificar que o produto misto dos vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} é nulo se, e somente se, eles são coplanares. Portanto, o produto misto serve para verificar se três vetores são linearmente independentes,

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{c} \text{ são linearmente independentes. } \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{0}. \quad (1.82)$$

No espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$, três vetores não-coplanares formam uma base, de modo que podemos também dizer que três vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} formam uma base se, e somente se, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. O produto misto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ é positivo se, e somente se, a projeção de \mathbf{c} ao longo de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é positiva, ou seja, $\mathbf{n}_+(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$. O produto misto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ é negativo se, e somente se, a projeção de \mathbf{c} ao longo de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é negativa, ou seja, $\mathbf{n}_+(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$. Uma base ordenada $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ é dita uma **base dextrógira** ou **de orientação positiva** se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} > 0$; é dita uma **base levógira** ou **de orientação negativa** se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} < 0$. Por exemplo, a base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, que satisfaz as relações (1.76), é dextrógira; já com os vetores dessa base formamos a base ordenada levógira $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Salvo alguma menção explícita em contrário, somente usaremos bases dextrógiras.

Para uma base ortonormal dextrógira $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, temos

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk}. \quad (1.83)$$

Conseqüentemente, se $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j$ e $\mathbf{c} = \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k$, obtemos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k, \quad (1.84)$$

que é a expressão do produto misto de três vetores em termos de suas componentes. O membro direito dessa expressão é, por definição, o determinante de uma matriz três por três, na qual a primeira linha é a trinca ordenada das componentes do vetor \mathbf{a} , a segunda, das componentes de \mathbf{b} e a terceira, das componentes de \mathbf{c} :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

Geometricamente, o produto misto de vetores linearmente independentes \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} é um número cujo módulo é o volume de um paralelepípedo de arestas de comprimentos $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ e $|\mathbf{c}|$, nas respectivas direções de \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} .

Passemos agora ao produto vetorial de um vetor pelo produto vetorial de dois outros, chamado **duplo produto vetorial**. Primeiramente, consideremos o duplo produto vetorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ de três vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , com \mathbf{b} e \mathbf{c} não-nulos e não-colineares. O produto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ é perpendicular a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ e, portanto, está no plano de \mathbf{b} e \mathbf{c} . Conseqüentemente, existem números β e γ tais que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}, \quad (1.86)$$

pois \mathbf{b} e \mathbf{c} não são nulos e nem colineares. O produto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ também é perpendicular a \mathbf{a} , de modo que o produto escalar de \mathbf{a} pelos dois membros da equação (1.86) resulta em

$$\beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 0. \quad (1.87)$$

A solução geral dessa equação, exceto para o caso $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, é

$$\beta = \xi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \quad \text{e} \quad \gamma = -\xi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (1.88)$$

onde ξ é um número qualquer. No caso excepcional $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ temos \mathbf{a} perpendicular a \mathbf{b} e \mathbf{c} e, portanto, paralelo a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Nesse caso, temos $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ e obtemos de (1.86) $\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = 0$. Dessa igualdade obtemos que β e γ são nulos, pois \mathbf{b} e \mathbf{c} são linearmente independentes. Portanto, as expressões (1.88) também são verdadeiras no caso em que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$. Sendo sempre verdadeiras, podemos substituí-las em (1.86) e obter

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \xi[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}], \quad (1.89)$$

Determinemos o número ξ sem particularizar os vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} . Levando em conta que \mathbf{b} e \mathbf{c} não são nulos nem colineares, podemos definir os dois vetores não-nulos e perpendiculares, dados por $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ e $\mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_\perp/|\mathbf{c}_\perp|$, onde $\mathbf{c}_\perp = \Pi_{\mathbf{b}}\mathbf{c}$, *i.e.*, é a projeção vetorial de \mathbf{c} no plano perpendicular a \mathbf{b} . Definimos também $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ e obtemos uma base ortonormal dextrógira $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Nessa base temos $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\mathbf{e}_1$ e

$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + |\mathbf{c}_\perp| \mathbf{e}_2$, onde c_1 é a componente de \mathbf{c} ao longo de \mathbf{e}_1 . Finalmente, podemos expandir nessa base o vetor \mathbf{a} e obter $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$. Usando essas expansões de \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} em (1.89), obtemos $|\mathbf{b}| |\mathbf{c}_\perp| (a_2 \mathbf{e}_1 - a_1 \mathbf{e}_2) = \xi |\mathbf{b}| |\mathbf{c}_\perp| (a_2 \mathbf{e}_1 - a_1 \mathbf{e}_2)$. Mas $|\mathbf{b}|$ e $|\mathbf{c}_\perp|$ são diferentes de zero, pois \mathbf{b} não é nulo e \mathbf{c} não é paralelo a \mathbf{b} ; logo, $(a_2 \mathbf{e}_1 - a_1 \mathbf{e}_2) = \xi (a_2 \mathbf{e}_1 - a_1 \mathbf{e}_2)$. Se a_1 ou a_2 forem diferentes de zero, obtemos $\xi = 1$ e (1.89) toma a forma

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}. \quad (1.90)$$

Se a_1 e a_2 forem iguais a zero, temos que $\mathbf{a} = a_3 \mathbf{e}_3$, ou seja, \mathbf{a} é perpendicular a \mathbf{b} e \mathbf{c} . Com isso, os dois membros da igualdade (1.90) são manifestamente nulos, de modo que ela é verdadeira também nesse caso. Os únicos casos ainda não considerados são aqueles em que \mathbf{b} ou \mathbf{c} são nulos ou paralelos. Mas nesses casos é fácil verificar que são iguais os dois membros da igualdade (1.90). Portanto, a fórmula (1.90) é verdadeira em todos os casos. Ela é chamada **fórmula de expulsão do duplo produto vetorial** (nela os vetores do membro esquerdo que estão entre parênteses são expulsos e ficam fora dos parênteses no membro direito).

A fórmula de expulsão pode ser demonstrada, de modo puramente algébrico, expandindo-se seus vetores em uma base ortonormal e calculando-se o duplo produto vetorial com essas expansões. Usando-se (1.76), temos

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_{i,j,m,n=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} \right) \mathbf{e}_i a_j b_m c_n. \quad (1.91)$$

Agora vamos obter uma expressão para o somatório em k . Para isso será essencial ter em mente que todos os índices estão restritos ao domínio $\{1, 2, 3\}$. Em $\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk}$ o índice k está somado em 1, 2, 3, de modo que a soma é uma função apenas de i , j , m e n , que denominamos S ,

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = S(i, j; m, n). \quad (1.92)$$

No caso em que $i \neq j$, para cada par de valores de i e j , temos somente um termo dessa soma que é diferente de zero. É o termo no qual k assume o valor diferente de i e j que restar no conjunto $\{1, 2, 3\}$. Denotando por \bar{k} esse valor, temos $S(i, j; m, n) = \varepsilon_{ij\bar{k}} \varepsilon_{mn\bar{k}}$. Nessa expressão $\varepsilon_{mn\bar{k}}$ é diferente de zero se, e somente se, m e n forem diferentes \bar{k} , ou seja, é diferente de zero se, e somente se, $\{m, n\} = \{i, j\}$. Há dois casos em que essa condição é satisfeita; em um $m = i$ e $n = j$ e no outro $m = j$ e $n = i$. No primeiro temos $S(i, j; i, j) = \varepsilon_{ij\bar{k}} \varepsilon_{ij\bar{k}} = 1$ e no segundo, $S(i, j; j, i) = \varepsilon_{ij\bar{k}} \varepsilon_{ji\bar{k}} = -1$. Em suma,

$$S(i, j; m, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = i \text{ e } n = j, \\ -1 & \text{se } m = j \text{ e } n = i, \\ 0 & \text{se } \{m, n\} \neq \{i, j\}. \end{cases} \quad (i \neq j) \quad (1.93)$$

Temos, então,

$$S(i, j; m, n) = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \quad (i \neq j). \quad (1.94)$$

Substituindo essa expressão em (1.92), obtemos

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} , \quad (1.95)$$

nos casos em que $i \neq j$. No entanto, os dois membros dessa igualdade são manifestamente verdadeiros nos demais casos, nos quais $i = j$. Portanto, (1.95) é válida em todos os casos; é uma identidade entre o delta de Kronecker e o símbolo de Levi-Civita. Substituindo essa identidade em (1.91), demonstra-se, novamente, a fórmula da expulsão (1.90), agora de modo puramente algébrico.

A fórmula da expulsão é de grande utilidade. Com ela fica fácil, por exemplo, demonstrar a identidade de Jacobi, dada por ME4 em (1.58).

1.5 Vetores ligados do Espaço Euclidiano

Consideremos o conjunto $\vec{\mathcal{E}}_P$ das setas que emanam de um ponto **fixo** P do Espaço Euclidiano \mathcal{E} . Tais setas são da forma \vec{PQ} , onde Q é um ponto arbitrário de \mathcal{E} . Para essas setas podemos definir operações de adição e multiplicação por escalar, como mostraremos a seguir.

Dadas duas setas \vec{PA} e \vec{PB} em $\vec{\mathcal{E}}_P$, podemos formar um paralelogramo $PASB$, no qual S é o vértice oposto a P , como indicado na figura 1.14. Definimos então a

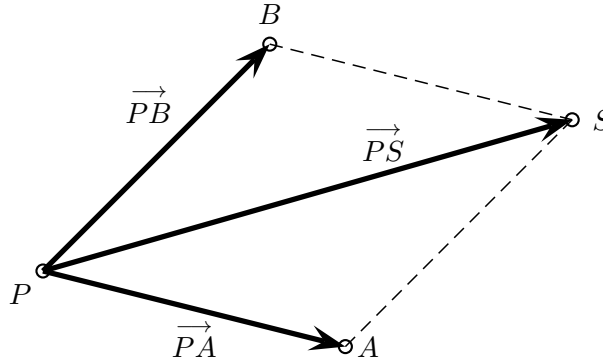


Figura 1.14: Adição pela regra do paralelogramo de duas setas com origem comum no ponto P . A soma de \vec{PA} com \vec{PB} é a seta \vec{PS} .

soma $\vec{PA} + \vec{PB}$, da seta \vec{PA} com a seta \vec{PB} , como sendo a seta \vec{PS} , que vai do ponto P até o vértice oposto S do paralelogramo $PASB$. Esse paralelogramo é chamado **paralelogramo formado pelas setas \vec{PA} e \vec{PB}** . Diz-se então que a soma dessas setas é a diagonal do paralelogramo formado por elas, com sentido da origem comum para o vértice oposto. Essa regra de somar setas que emanam de um ponto P é chamada **regra do paralelogramo** e define uma função

$$\begin{aligned} + : \vec{\mathcal{E}}_P \times \vec{\mathcal{E}}_P &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}}_P \\ &: (\vec{PA}, \vec{PB}) \longmapsto \vec{PA} + \vec{PB} \end{aligned} \quad (1.96)$$

que chamamos **adição de setas de $\vec{\mathcal{E}}_P$** .

Seja um número real λ e uma seta \vec{PA} de $\vec{\mathcal{E}}_P$ e definamos o produto de λ por \vec{PA} , denotado por $\lambda\vec{PA}$, da maneira que segue. Se $\lambda = 0$ ou \vec{PA} é a seta nula \vec{PP} definimos o produto $\lambda\vec{PA}$ como sendo a seta nula \vec{PP} . Nos outros casos $\lambda\vec{PA}$ é uma seta com origem em P , com a mesma direção que \vec{PA} , com comprimento igual a $|\lambda||\vec{PA}|$, com o mesmo sentido que \vec{PA} se λ for positivo e sentido oposto se λ for negativo. Desse modo, temos a função

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{E}}_P \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}_P \\ &: (\lambda, \vec{PA}) \longmapsto \lambda\vec{PA}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

que chamamos **multiplicação de escalar por seta de $\vec{\mathcal{E}}_P$** .

É trivial verificar que $\vec{\mathcal{E}}_P$ munido dessas operações forma um espaço vetorial real, dito dos **vetores ligados** em P , ou **fixos** em P . Tal espaço vetorial é denotado também por $T_P(\mathcal{E})$. Em cada ponto de \mathcal{E} existe um espaço vetorial de vetores fixos e o conjunto

$$T(\mathcal{E}) := \bigcup_{P \in \mathcal{E}} T_P(\mathcal{E}) \quad (1.98)$$

subentende todas as setas do Espaço Euclidiano \mathcal{E} . Notemos que esse conjunto de todas as setas ligadas não é um espaço vetorial, pois não foi fornecida nenhuma regra para adicionar setas ligadas em pontos diferentes do espaço.

É claro que existe uma estreita relação entre o espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$ dos vetores livres e o espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}_P$ dos vetores ligados em P . Primeiramente, temos uma correspondência biunívoca entre esses espaços vetoriais. Ela é definida, por um lado, fazendo corresponder a cada seta \vec{PQ} em $\vec{\mathcal{E}}_P$ um único vetor livre $[\vec{PQ}]_{\sim}$ em $\vec{\mathcal{E}}$. Por outro lado, fazendo corresponder a cada vetor livre \mathbf{a} em $\vec{\mathcal{E}}$ a única seta em V_P que tem a mesma direção, o mesmo comprimento e o mesmo sentido que \mathbf{a} . Denotando por \mathbf{a}_P a seta em $\vec{\mathcal{E}}_P$ que corresponde ao vetor livre \mathbf{a} em $\vec{\mathcal{E}}$, temos a função bijetora

$$\begin{aligned} \ell_P : \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}}_P \\ &: \mathbf{a} \longmapsto \mathbf{a}_P \end{aligned} \quad (1.99)$$

que estabelece a mencionada correspondência biunívoca. Essa função relaciona as operações efetuadas em $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{E}}_P$ da seguinte maneira:

$$\ell_P(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \ell_P(\mathbf{a}) + \ell_P(\mathbf{b}) \quad \text{e} \quad \ell_P(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\ell_P(\mathbf{a}), \quad (1.100)$$

isto é,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_P = \mathbf{a}_P + \mathbf{b}_P \quad \text{e} \quad (\lambda\mathbf{a})_P = \lambda\mathbf{a}_P. \quad (1.101)$$

Sejam dois espaços vetoriais V e V' e $f : V \rightarrow V'$. Se, para quaisquer vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} de V , e qualquer número λ , tivermos

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) \quad \text{e} \quad f(\lambda\mathbf{a}) = \lambda f(\mathbf{a}), \quad (1.102)$$

diremos que f é uma **transformação linear** de V em V' . Notemos que já foram apresentados diversos exemplos de operador linear, que é o tipo particular de transformação linear na qual $V = V'$. Se a transformação linear é bijetora, dizemos que

é um **isomorfismo** de V em V' . Se há um isomorfismo de V em V' , dizemos que o espaço vetorial V é **isomorfo** ao espaço vetorial V' . O isomorfismo entre espaços vetoriais é uma relação de equivalência entre eles. Basta sabermos operar com os vetores de um espaço vetorial para sabermos o resultado de qualquer operação com os vetores do outro espaço vetorial que lhe é isomorfo. Por exemplo, sabendo o resultado $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, da soma dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} de V , sabemos que $f(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ é o resultado da soma dos vetores $f(\mathbf{a})$ e $f(\mathbf{b})$ de V' , conforme garantido pela primeira igualdade em (1.102). Reciprocamente, sabendo o resultado $f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$, da soma dos vetores $f(\mathbf{a})$ e $f(\mathbf{b})$ de V' , sabemos que $f^{-1}[f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})]$ é o resultado da soma dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} de V , conforme garantido também pela primeira igualdade em (1.102). Quando dois espaços vetoriais são isomorfos, basta trabalharmos com um deles e obter as propriedades algébricas do outro usando o isomorfismo. Diz-se que dois espaços isomorfos são algebricamente idênticos, embora possam se de naturezas bem diferentes. Na prática, é muitas vezes conveniente identificar espaços vetoriais isomorfos. Nesse caso, considera-se que o isomorfismo é uma identidade e os espaços são considerados, simplesmente, como idênticos.

Tendo em vista as propriedades (1.100), temos que a função bijetora ℓ_P definida em (1.99) é um isomorfismo entre o espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$ dos vetores livres e o espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}_P$ dos vetores ligados no ponto P . Com isso, não precisamos trabalhar explicitamente com espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}_P$. Qualquer resultado nesse espaço pode ser obtido trabalhando com os vetores livres de $\vec{\mathcal{E}}$ e usando o isomorfismo ℓ_P , que liga os vetores livres ao ponto P . Informalmente, podemos dispensar o uso explícito do espaço $\vec{\mathcal{E}}_P$ e do isomorfismo ℓ_P ; quando quisermos usar um vetor \mathbf{a}_P ligado em P , usamos o vetor livre \mathbf{a} e afirmamos que ele está aplicado em P .

1.6 Espaço vetorial \mathbb{R}^n

Consideremos o conjunto \mathbb{R}^n de todas as n -uplas de números reais. Vamos denotar uma n -upla por uma letra sobrelinhada. Se outra convenção não for explicitamente implementada, denotaremos o i -ésimo elemento da n -upla pela letra que a representa com subíndice i . Assim, escrevemos

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.103)$$

Definimos a **soma de duas n -uplas** (a_1, a_2, \dots, a_n) e (b_1, b_2, \dots, b_n) como sendo a n -upla

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n). \quad (1.104)$$

A operação de **adição de n -uplas** é a função

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &: (\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \bar{a} + \bar{b}, \end{aligned} \quad (1.105)$$

onde a soma $\bar{a} + \bar{b}$ é dada por (1.104). Definimos também **produto de um número λ por uma n -upla** (a_1, a_2, \dots, a_n) como sendo a n -upla

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) := (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n). \quad (1.106)$$

Temos a operação de **multiplicação de escalar por n -upla**,

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &: (\lambda, \bar{a}) \longmapsto \lambda \bar{a} . \end{aligned} \quad (1.107)$$

sendo $\lambda \bar{a}$ dada por (1.106). É trivial verificar que \mathbb{R}^n , munido dessas duas operações, forma um espaço vetorial. Nesse espaço o vetor nulo $\bar{0}$ é a n -upla $(0, 0, \dots, 0)$ e o vetor oposto a (a_1, a_2, \dots, a_n) é $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$, que representamos por $-(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Notemos que o espaço vetorial \mathbb{R}^n é definido sem nenhum apelo a conceitos geométricos; ele é definido a partir de propriedades puramente aritméticas dos números reais. Apesar disso, há relações importantes entre \mathbb{R}^n e os espaços vetoriais de setas no Espaço Euclidiano.

Seja \bar{e}_i ($i = 1, \dots, n$) a n -upla cujo i -ésimo elemento é 1 e cujos demais são nulos. Temos

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0) , \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0) , \dots , \quad \bar{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1) . \quad (1.108)$$

É trivial demonstrar que $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ é base de \mathbb{R}^n e que, portanto, \mathbb{R}^n é um espaço vetorial de dimensão n . Essa base, por suas características especiais, é chamada **base canônica** ou **base natural** de \mathbb{R}^n . Notemos que o espaço \mathbb{R}^1 , em essência, é o conjunto dos números reais considerado como um espaço vetorial com base canônica dada pelo número 1.

Dadas duas n -uplas (a_1, a_2, \dots, a_n) e (b_1, b_2, \dots, b_n) associamos a elas o número

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n . \quad (1.109)$$

Definimos, então, a operação

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: (\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \bar{a} \cdot \bar{b} , \end{aligned} \quad (1.110)$$

onde o número $\bar{a} \cdot \bar{b}$ é dado por (1.109). Essa operação satisfaz às propriedades (1.34) e, portanto, é uma **multiplicação interna** no espaço \mathbb{R}^n . Há uma infinidade de regras para associar números a pares de n -uplas que também satisfazem às propriedades (1.34). Elas também são multiplicações internas em \mathbb{R}^n , mas a multiplicação interna dada pela regra (1.109) é a mais simples e a que usaremos em nosso estudo de vetores. Como de hábito, o número (1.109) é chamado **produto interno**, ou **produto escalar**, de \bar{a} por \bar{b} , e o produto escalar de um vetor de \mathbb{R}^n por ele mesmo é chamado quadrado do vetor, $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a}$.

Usando o produto interno em \mathbb{R}^n , definimos módulo de uma n -upla como sendo o número

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} , \quad (1.111)$$

ou seja,

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} . \quad (1.112)$$

Também para o módulo de vetores de \mathbb{R}^n vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}| |\bar{b}| . \quad (1.113)$$

Usando essas desigualdade e as propriedades (1.34) da multiplicação interna (1.110), é possível demonstrar as seguintes propriedades para quaisquer n -uplas \bar{a} e \bar{b} de \mathbb{R}^n , e qualquer número λ de \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} N1) \quad & |\bar{a}| \geq 0. \text{ Além disso, } |\bar{a}| = 0 \iff \bar{a} = 0, \\ N2) \quad & |\lambda \bar{a}| = |\lambda| |\bar{a}|, \\ N3) \quad & |\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Notemos que os vetores de $\vec{\mathcal{E}}$ também satisfazem essas propriedades, como é fácil verificar.

Dadas duas trinca (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) associamos a elas a trinca

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \quad (1.115)$$

Definimos, então, a operação

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &: (\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \bar{a} \times \bar{b}, \end{aligned} \quad (1.116)$$

onde a trinca $\bar{a} \times \bar{b}$ é dada por (1.115). Essa operação satisfaz às propriedades (1.58) e, por isso, é chamada uma **multiplicação externa** no espaço \mathbb{R}^3 . Há uma infinidade de multiplicações externas em \mathbb{R}^3 , mas a que acabamos de definir é a que nos interessa em nosso estudo de vetores.

Dada uma base ordenada $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ em $\vec{\mathcal{E}}$, a cada $\mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}}$ corresponde uma única trinca ordenada de reais (a_1, a_2, a_3) , formada pelas respectivas componentes de \mathbf{a} na base \mathcal{B} , dadas pela decomposição $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$. Temos, pois, a função

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathcal{B}} : \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ : \mathbf{a} &\longmapsto (a_1, a_2, a_3). \end{aligned} \quad (1.117)$$

Essa é uma função bijetora, pois a cada trinca $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ também corresponde um único vetor em $\vec{\mathcal{E}}$, o vetor $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$. Temos

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) = \bar{a} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{a}). \quad (1.118)$$

De acordo com os resultados (1.64) e (1.65), temos que $\kappa_{\mathcal{B}}$ é linear,

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) + \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}) \quad \text{e} \quad \kappa_{\mathcal{B}}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a}). \quad (1.119)$$

Portanto, $\kappa_{\mathcal{B}}$ é um isomorfismo de $\vec{\mathcal{E}}$ em \mathbb{R}^3 e, conseqüentemente, $\vec{\mathcal{E}}$ e \mathbb{R}^3 são espaços vetoriais isomorfos. Por isso, é indiferente trabalharmos com as setas livres de $\vec{\mathcal{E}}$ ou com as trinca de números de \mathbb{R}^3 . Os resultados obtidos em um espaço vetorial podem ser transferidos para o outro por meio do isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$. Notemos que, de acordo com a definição (1.108), no caso $n = 3$,

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_i) = \bar{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.120)$$

Obviamente, o isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$ depende da base \mathcal{B} considerada. Quando a base em uso está fixada, esse isomorfismo permite, na prática, identificar os dois espaços

vetoriais. Desse modo, ao invés de escrevermos $\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) = (a_1, a_2, a_3)$, escrevemos, simplesmente $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, e consideramos que a seta livre é igual à trinca de suas componentes na base em uso. Essa identificação,

$$\mathbf{a} = \bar{a}, \quad (1.121)$$

é conveniente, desde que não usemos nenhuma outra base além de $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Se, em um dado problema, usarmos duas bases diferentes $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, um mesmo vetor \mathbf{a} de $\vec{\mathcal{E}}$ fica, em geral, associado a duas trincas diferentes de componentes, nas respectivas bases \mathcal{B} e \mathcal{B}' , $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a'_1\mathbf{e}'_1 + a'_2\mathbf{e}'_2 + a'_3\mathbf{e}'_3$. Escrevendo $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\bar{a}' = (a'_1, a'_2, a'_3)$, temos

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) = \bar{a} \quad \text{e} \quad \kappa_{\mathcal{B}'}(\mathbf{a}) = \bar{a}'. \quad (1.122)$$

Como, em geral, $\bar{a}' \neq \bar{a}$, chegaríamos a um absurdo se tomássemos os isomorfismos $\kappa_{\mathcal{B}'}$ e $\kappa_{\mathcal{B}}$ como identidades e seria inconveniente também escolher apenas um deles para tomar como identidade. Em suma, se há mais de uma base no problema, não devemos identificar setas com suas trincas de componentes.

Notemos que os vetores livres em uma dada jazitura formam um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^2 e os vetores livres em uma dada direção formam um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^1 . As N -uplas de vetores livres formam um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^{3N} , que será usado em nosso estudo de Mecânica Clássica.

Agora, consideremos que a base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ em uso é ortonormal. Tendo em vista o resultado (1.73) para o produto interno de setas livres e a definição (1.109) de produto interno para o caso de trincas de \mathbb{R}^3 , obtemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}). \quad (1.123)$$

Considerando que a base ortonormal é dextrógira, e usando o resultado (1.78) juntamente com a definição (1.115), obtemos

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) \times \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}). \quad (1.124)$$

Em notação mais simplificada, as propriedades (1.123) e (1.124) tomam as respectivas formas

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad \text{e} \quad \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \bar{a} \times \bar{b}. \quad (1.125)$$

Essas igualdades mostram que podemos obter os produtos escalar e vetorial de setas fazendo os produtos escalar e vetorial de trincas de \mathbb{R}^3 , e vice-versa.

1.7 Sistemas de eixos Cartesianos

Um par constituído por um ponto de \mathcal{E} e uma base de $\vec{\mathcal{E}}$ é chamado **sistema de coordenadas cartesianas em \mathcal{E}** ; o ponto de \mathcal{E} é chamado **origem do sistema de coordenadas** e a base de $\vec{\mathcal{E}}$, **base do sistema de coordenadas**. Na figura 1.12, por exemplo, usamos um sistema de coordenadas com origem P para demonstrar que um vetor qualquer pode ser decomposto em uma base. Consideremos um sistema

de coordenadas com base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e origem que denotaremos por O . A reta orientada que passa pela origem O do sistema de coordenadas e tem a direção e o sentido de \mathbf{e}_i é chamada **i -ésimo eixo de coordenadas** dos sistema de coordenadas e é denotado por $O\mathcal{X}_i$ ($i = 1, 2, 3$). O conjunto desses eixos é chamado **sistema de eixos cartesianos** e é denotado por $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$. Dizemos que O é a **origem do sistema de eixos** e $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, a **base do sistema de eixos**. A componente a_i de um vetor \mathbf{a} ao longo do vetor \mathbf{e}_i da base é também denominada **componente do vetor ao longo do eixo $O\mathcal{X}_i$** ou, **no eixo $O\mathcal{X}_i$** ($i = 1, 2, 3$).

Em (1.16), definimos o vetor-posição de um ponto P relativo a um ponto O como sendo o vetor \mathbf{r} de $\vec{\mathcal{E}}$, que vai de O até P . Seja O a origem do sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ e P um ponto qualquer do espaço. A componente no eixo $O\mathcal{X}_i$ do vetor-posição de P relativo à origem O é chamada **coordenada do ponto P no eixo $O\mathcal{X}_i$** , ou **i -ésima coordenada de P no sistema de coordenadas em consideração**, ou ainda, **i -ésima coordenada de P relativa ao sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$** . Escrevendo

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i, \quad (1.126)$$

temos que as coordenadas do ponto P no sistema de coordenadas considerado são os números x_i ($i = 1, 2, 3$). A figura 1.15 ilustra um sistema de eixos cartesianos e a decomposição de \mathbf{r} , o vetor-posição de P relativo à origem O do sistema de coordenadas. Os pontos de um eixo que tem coordenadas positivas formam o chamado **semi-eixo positivo** e os pontos com coordenadas negativas, o chamado **semi-eixo negativo**.

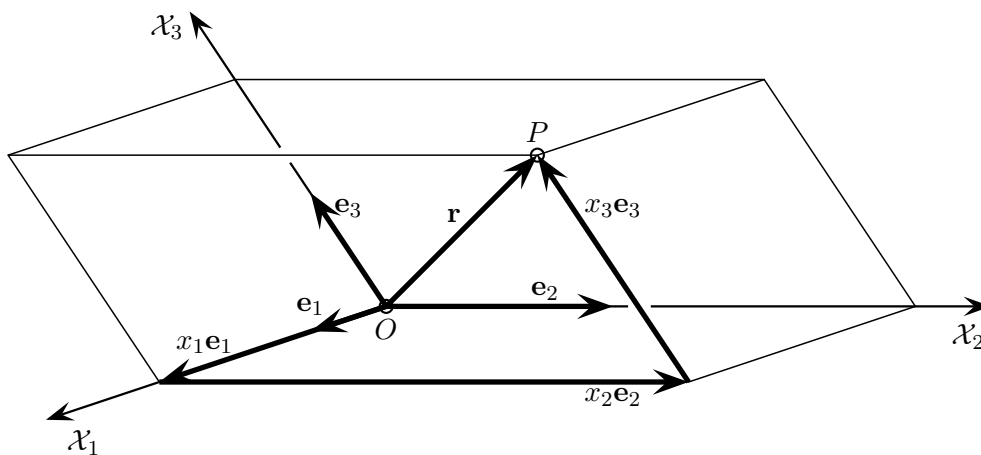


Figura 1.15: Sistema de eixos cartesianos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ com a base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ do sistema de coordenadas. As componentes vetoriais do vetor-posição de P são as respectivas coordenadas multiplicadas pelos respectivos vetores da base.

Considerando ordenada a base, o sistema de eixos também fica ordenado de acordo com a base. Seja a base ordenada dada por $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3})$, onde, obviamente, i_1, i_2 e i_3 são três números não-repetidos escolhidos de 1 a 3; a correspondente **ordenação dos**

eixos cartesianos será dada por $(O\mathcal{X}_{i_1}, O\mathcal{X}_{i_2}, O\mathcal{X}_{i_3})$. Como discutido anteriormente, a ordenação da base também ordena as componentes de um vetor na base e, em particular, ordenada as coordenadas de qualquer ponto no sistema de coordenadas empregado. Seguindo, por exemplo, a ordenação natural dos índices, temos a base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e obtemos que, a cada ponto P de \mathcal{E} , corresponde uma única trinca de números reais (x_1, x_2, x_3) , constituída pelas coordenadas de P . Além disso, a cada trinca (x_1, x_2, x_3) de números reais corresponde um único ponto P de \mathcal{E} , aquele com vetor-posição $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Portanto, dado um sistema de coordenadas em \mathcal{E} , fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos de \mathcal{E} e as trincas de \mathbb{R}^3 . Ela é dada pela função bijetora

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ : P &\longmapsto (x_1, x_2, x_3) . \end{aligned} \quad (1.127)$$

que associa a cada ponto do Espaço Euclidiano a sua trinca ordenada de coordenadas relativas ao sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$. A trinca ordenada de coordenadas é um vetor do espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Esse vetor é chamado **vetor-posição do ponto P relativa ao sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$** . Vamos denotar esse vetor por \bar{r} , de modo que podemos escrever

$$\mathcal{C}(P) = (x_1, x_2, x_3) = \bar{r} . \quad (1.128)$$

Aqui, dois comentários são oportunos. O primeiro se refere meramente a notação. Na seção anterior convencionamos que o símbolo para a trinca de coordenadas (x_1, x_2, x_3) de \mathbb{R}^3 deveria ser \bar{x} , mas preferimos usar \bar{r} , por ser mais tradicional e comum como símbolo de vetor-posição relativo a um sistema de eixos. O segundo comentário é de caráter conceitual e de suma importância. Consiste na distinção fundamental entre vetor posição relativo a um ponto e vetor-posição relativo a um sistema de eixos. O vetor-posição de um ponto P relativo a um ponto O é uma seta \mathbf{r} do espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$, enquanto o vetor-posição de P relativo ao sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ é uma trinca \bar{r} de \mathbb{R}^3 . Embora distintos, esses vetores estão relacionados pelo fato das componentes de \mathbf{r} na base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ do sistema de eixos serem as coordenadas que formam a trinca \bar{r} , conforme manifesto em (1.126) e (1.128). Temos

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad \text{e} \quad \bar{r} = (x_1, x_2, x_3) . \quad (1.129)$$

Na seção anterior estabelecemos em (1.117) o isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$ que dá relação entre esses vetores

$$\bar{r} = \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}) . \quad (1.130)$$

Ambos os vetores são úteis e necessários em nosso estudo. O vetor \mathbf{r} apresenta a vantagem de ser um objeto geométrico, representável por setas que descrevem deslocamentos no espaço. O vetor \bar{r} tem as vantagens de ser uma trinca de números, com os quais temos facilidade para operar, e de descrever apropriadamente o conceito de posição relativa usado em Mecânica. Como explicado na seção anterior a propósito da igualdade (1.121), temos aqui à possibilidade de identificar esses dois vetores, escrevendo $\bar{r} = \mathbf{r}$, desde que usemos um único sistema de coordenadas. Em contrapartida, em um problema no qual usamos mais de um sistema de coordenadas, é essencial manter a distinção rigorosa entre \bar{r} e \mathbf{r} . Isso é evidente no caso em que há

dois sistemas de eixos distintos, mas com a mesma origem, digamos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$, com base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, e $O\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$, com base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. Nesse caso um ponto P tem um único vetor-posição relativo à origem comum O , $\mathbf{r} = P - O$, mas dois vetores-posição distintos relativos aos dois sistemas de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ e $O\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$. Denotando-os, respectivamente, por $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\bar{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, temos

$$\bar{r} = \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}), \quad \bar{r}' = \kappa_{\mathcal{B}'}(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \bar{r} \neq \bar{r}' . \quad (1.131)$$

Agora, consideremos uma mudança de sistemas de coordenadas quaisquer. Sejam dois sistemas de eixos quaisquer com origens que podem ser distintas ou não. Um é o sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$, com base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e o outro é um sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$, com base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. As coordenadas de um ponto P relativas ao sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ são dadas pela função bijetora (1.127), enquanto as coordenadas do mesmo ponto P relativas ao sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ são dadas pela função bijetora análoga

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &: P \longmapsto (x'_1, x'_2, x'_3) . \end{aligned} \quad (1.132)$$

Temos

$$(x_1, x_2, x_3) = \bar{r} = \mathcal{C}(P) \quad \text{e} \quad (x'_1, x'_2, x'_3) = \bar{r}' = \mathcal{C}'(P) . \quad (1.133)$$

A mudança de um sistema de coordenadas para outro é dada por

$$\bar{r}' = \psi(\bar{r}), \quad (1.134)$$

onde aparece a função bijetora $\psi = \mathcal{C}' \circ \mathcal{C}^{-1}$, de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 , que chamamos **função de mudança de coordenadas**. Estaremos interessados em mudanças de coordenadas de um tipo bastante especial, descritas por funções relativamente simples que estudaremos mais adiante.

Quando se usa um sistema de coordenadas fixo, de modo que nem se cogite em mudanças de coordenadas, é comum usar a função bijetora (1.127), de pontos do Espaço Euclidiano \mathcal{E} em trincas de \mathbb{R}^3 , para fazer a identificação desses dois conjuntos. Diz-se, então, que o Espaço Euclidiano \mathcal{E} é \mathbb{R}^3 . Essa identificação deve ser usada com cuidado, uma vez que \mathbb{R}^3 pode ser considerado como um espaço vetorial, o que não é possível no caso de \mathcal{E} (essa impossibilidade decorre, por exemplo, da inexistência de um ponto especial em \mathcal{E} que possa assumir o papel de vetor nulo).

Passemos agora ao caso em que o sistema de eixos cartesianos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ tem base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ortonormal. Nesse caso, obviamente, os eixos do sistema são ortogonais. Doravante, estaremos usando esse tipo de sistema de eixos, salvo menção explícita em contrário. Assim, quando nos referirmos a um sistema de eixos, ficará subentendido que os eixos são ortogonais e a base do sistema é ortonormal. Para um tal sistema de eixos, podemos usar a relação (1.69), aplicada ao vetor-posição de um ponto P , para obter que a i -ésima coordenada do ponto é dada por

$$x_i = \text{proj}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{r} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.135)$$

Cada coordenada adquire então um significado geométrico simples, decorrente da definição de projeção (1.19), ilustrada na figura 1.8. O módulo da coordenada x_i do

ponto P é a distância da origem ao pé da perpendicular ao eixo $O\mathcal{X}_i$ baixada do ponto P ; o sinal da coordenada é positivo ou negativo conforme o pé da perpendicular caia no semi-eixo positivo ou negativo do eixo $O\mathcal{X}_i$. A figura 1.16 é uma ilustração dessa propriedade.

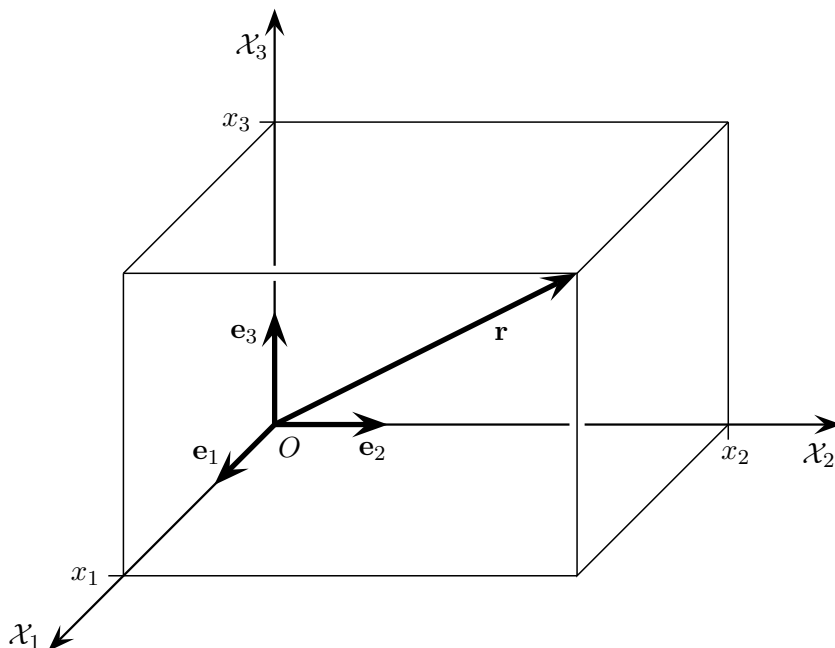


Figura 1.16: Em um sistema de eixos ortogonais $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$, com a base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, as coordenadas de um ponto são as projeções do vetor-posição do ponto relativo à origem O .

Agora, passemos à caracterização das possíveis mudanças de coordenadas ao passarmos de um sistema de eixos ortogonais para outro. Uma vez que os eixos são todos ortogonais, eles podem diferir por terem origens diferentes ou bases ortonormais diferentes. Se mudarmos a origem de um sistema de eixos, sem mudar a base ortonormal, obteremos um novo sistema de eixos transladado em relação ao primeiro. Se girarmos a base ortonormal, sem mudar a origem, obteremos um sistema de eixos girado em relação ao primeiro. Outras mudanças de sistema de eixos são possíveis. Vamos obter todas as possíveis mudanças de coordenadas partindo apenas da hipótese de que a distância entre dois pontos não depende do sistema de coordenadas usado para calculá-la, isto é, a distância entre dois pontos é um invariante por mudança de sistema de coordenadas.

Sejam dois pontos do Espaço Euclidiano, P_1 e P_2 , cujos vetores-posição relativos à origem O do sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ são \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , respectivamente. Desejamos expressar a distância $d(P_1, P_2)$ entre os pontos em termos de coordenadas relativas ao sistema de eixos. Sendo a distância uma quantidade não-negativa, nada perdemos em trabalhar com o seu quadrado, que é dado pelo módulo quadrado do vetor $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$,

i.e., $d(P_1, P_2)^2 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$. O módulo quadrado, por sua vez, é dado por um produto escalar em \mathcal{E}^3 , $d(P_1, P_2)^2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Uma vez que o sistema de eixos, por hipótese, tem base ortonormal, podemos usar a primeira igualdade em (1.125) para obter $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2) \cdot (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2)$, ou seja, $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = |\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2|^2$, onde $\bar{\mathbf{r}}_1$ e $\bar{\mathbf{r}}_2$ são os respectivos vetores-posição de P_1 e P_2 relativos ao sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$. Portanto, $d(P_1, P_2)^2 = |\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2|^2$, que é a expressão procurada da distância em termos de coordenadas relativas a $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$. Para um outro sistema de eixos ortogonal $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$, obtemos $d(P_1, P_2)^2 = |\bar{\mathbf{r}}'_1 - \bar{\mathbf{r}}'_2|^2$, onde $\bar{\mathbf{r}}'_1$ e $\bar{\mathbf{r}}'_2$ são os respectivos vetores-posição de P_1 e P_2 relativos ao sistema $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$. Portanto, a invariância da distância nos leva à seguinte condição sobre as coordenadas

$$|\bar{\mathbf{r}}'_1 - \bar{\mathbf{r}}'_2|^2 = |\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2|^2. \quad (1.136)$$

Usando a notação da equação (1.134) temos a expressão

$$|\psi(\bar{\mathbf{r}}_1) - \psi(\bar{\mathbf{r}}_2)|^2 = |\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2|^2, \quad (1.137)$$

na qual ψ é a função de mudança de coordenadas. Definindo a função $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por meio de $G(\bar{\mathbf{r}}) = \psi(\bar{\mathbf{r}}) - \psi(\bar{\mathbf{0}})$, obtemos

$$\psi(\bar{\mathbf{r}}) = G(\bar{\mathbf{r}}) + \bar{\mathbf{b}} \quad (\bar{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3), \quad (1.138)$$

onde $\bar{\mathbf{b}} = \psi(\bar{\mathbf{0}})$ e $G(\bar{\mathbf{0}}) = \bar{\mathbf{0}}$. A invariância da distância (1.137) nos leva à seguinte condição sobre G

$$|G(\bar{\mathbf{r}}_1) - G(\bar{\mathbf{r}}_2)|^2 = |\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2|^2. \quad (1.139)$$

Tomando $\bar{\mathbf{r}}_2 = \bar{\mathbf{0}}$, usando que $G(\bar{\mathbf{0}}) = \bar{\mathbf{0}}$, e escrevendo $\bar{\mathbf{r}}$ no lugar de $\bar{\mathbf{r}}_1$, obtemos da condição (1.139)

$$|G(\bar{\mathbf{r}})|^2 = |\bar{\mathbf{r}}|^2. \quad (1.140)$$

Escrevendo os módulos dessa expressão em termos de produtos escalares, obtemos $G(\bar{\mathbf{r}}) \cdot G(\bar{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{r}}$. Agora, usando esse resultado na expressão obtida escrevendo (1.139) em termos de produtos escalares, chegamos em

$$G(\bar{\mathbf{r}}_1) \cdot G(\bar{\mathbf{r}}_2) = \bar{\mathbf{r}}_1 \cdot \bar{\mathbf{r}}_2, \quad (1.141)$$

que é descrita dizendo que G preserva o produto escalar. Graças a essa propriedade de G , obtemos $|G(\bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_2) - [G(\bar{\mathbf{r}}_1) + G(\bar{\mathbf{r}}_2)]|^2 = 0$ e $|G(\lambda\bar{\mathbf{r}}) - \lambda G(\bar{\mathbf{r}})|^2 = 0$. Mas a propriedade N1 em (1.114) nos garante que o único vetor de módulo zero em \mathbb{R}^3 é $\bar{\mathbf{0}}$; logo, $G(\bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_2) - [G(\bar{\mathbf{r}}_1) + G(\bar{\mathbf{r}}_2)] = \bar{\mathbf{0}}$ e $G(\lambda\bar{\mathbf{r}}) - \lambda G(\bar{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{0}}$. *i.e.*,

$$G(\bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_2) = G(\bar{\mathbf{r}}_1) + G(\bar{\mathbf{r}}_2) \quad \text{e} \quad G(\lambda\bar{\mathbf{r}}) = \lambda G(\bar{\mathbf{r}}), \quad (1.142)$$

ou seja, G é um operador linear sobre o espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Um operador linear G que goza da propriedade (1.141) é dito **ortogonal**. Usando esse resultado em (1.138), obtemos que a função de transformação de coordenadas ψ que satisfaz (1.137) deve ser, necessariamente, um operador linear ortogonal seguido da adição de um vetor qualquer de \mathbb{R}^3 . Essa condição é também suficiente. De fato, usando-se (1.138) e (1.141), demonstra-se (1.137).

Em qualquer espaço vetorial V , o operador identidade id_V é, por definição, aquele que transforma qualquer vetor nele mesmo, isto é, $id_V : V \rightarrow V$ e $id_V(v) = v$ para qualquer vetor v de V . É trivial demonstrar que todo operador identidade é linear e, além disso, ortogonal para qualquer definição de multiplicação interna em V . Portanto, no caso em estudo, temos que $G = id_{\mathbb{R}^3}$ é um exemplo de operador ortogonal em \mathbb{R}^3 que, substituído em (1.138), nos leva à transformação de coordenadas

$$\psi(\bar{r}) = \bar{r} + \bar{b} \quad (\bar{b} \in \mathbb{R}^3). \quad (1.143)$$

Essa transformação é chamada **translação em \mathbb{R}^3** por um vetor \bar{b} . Um momento de reflexão nos leva a concluir que essa transformação de coordenadas ocorre se o sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ for obtido submetendo todos os pontos do sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ a um mesmo deslocamento $-\mathbf{b}$ no Espaço Euclidiano \mathcal{E} , isto é, transladando $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ de $-\mathbf{b}$. Usando essas considerações podemos concluir: transformações de coordenadas deixam invariante a distância entre dois pontos se, e somente se, forem dadas pela ação de um operador linear ortogonal seguida de uma translação.

Uma transformação possível ocorre com translação nula, *i.e.*, $\bar{b} = \bar{0}$, de modo que (1.138) reduz-se ao operador ortogonal G ,

$$\psi(\bar{r}) = G(\bar{r}), \quad (1.144)$$

Uma vez que G é ortogonal, temos que $G(\bar{0}) = \bar{0}$, *i.e.*, com essa transformação de coordenadas a trinca de coordenadas nula é transformada na trinca de coordenadas nula. Isso ocorre se, e somente se, a mudança de sistema de eixos mantiver a origem no mesmo ponto. Um deslocamento de uma estrutura rígida, como um sistema de eixos ortogonais, que mantém um ponto fixo, como a origem, é chamada **rotação** em torno do ponto fixo. Portanto, podemos imaginar como exemplo de operador ortogonal aquele decorrente de uma rotação do sistema de eixos em torno da origem. Um outro exemplo de operador ortogonal é decorrente da mera troca de sentido dos três eixos de $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$; essa operação é chamada **inversão espacial**. Em estudos mais detalhados é possível mostrar que todo operador ortogonal é uma sucessão de rotações e inversões espaciais. Essas considerações devem bastar para nos dar uma intuição sobre o significado geométrico da transformação de coordenadas (1.137).

As transformações de coordenadas do tipo (1.143) formam um grupo, chamado **grupo das translações em \mathbb{R}^3** , e as do tipo (1.144) formam o **grupo das transformações ortogonais em \mathbb{R}^3** . Também as transformações completas (1.138), com uma transformação ortogonal seguida de um translação, formam um grupo, chamado **grupo euclidiano $E(3)$** .

Para terminar essa seção, consideremos uma nova opção de notação muito usada em Geometria. Nela, os eixos coordenados $O\mathcal{X}_1$, $O\mathcal{X}_2$ e $O\mathcal{X}_3$ são denotados, respectivamente, por $O\mathcal{X}$, $O\mathcal{Y}$ e $O\mathcal{Z}$, e o sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$, conseqüentemente, por $O\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Em conformidade com essas mudanças, as coordenadas x_1 , x_2 e x_3 são escritas como x , y e z , respectivamente; o vetor posição relativo ao sistema de eixos $O\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ é dado, então, por $\bar{r} = (x, y, z)$.

1.8 Funções vetoriais de variável real

Em todas as seções anteriores fizemos um tratamento algébrico e geométrico de vetores, sem usar noções de cálculo infinitesimal. Nesta seção apresentamos rudimentos do cálculo diferencial de funções vetoriais de variável real.

Seja I um intervalo em \mathbb{R} e \mathbf{A} uma função que associa a cada elemento de I um vetor em $\vec{\mathcal{E}}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : I &\longrightarrow \\ &: t \longmapsto \mathbf{A}(t) . \end{aligned} \quad (1.145)$$

Na nomenclatura usual \mathbf{A} é uma função vetorial de variável real.

Uma vez que temos uma definição de módulo de um vetor, podemos definir o conceito de limite para as funções vetoriais de variável real. Dizemos que um vetor \mathbf{L} é **limite** de $\mathbf{A}(t)$, quando t tende para um valor t_0 ($t_0 \in I$), se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}| < \varepsilon . \quad (1.146)$$

Nesse caso, se existir um limite \mathbf{L} , ele é único e escrevemos

$$\mathbf{L} = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) . \quad (1.147)$$

Nas propriedades dos limites que enunciaremos a seguir está pressuposto que existem os limites das funções envolvidas.

Dadas duas funções vetoriais de variável real, $\mathbf{A} : I \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ e $\mathbf{B} : I \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$, temos que $: t \in I \mapsto \mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)$ é uma função vetorial de variável real e

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{B}(t) . \quad (1.148)$$

Dada uma função real de variável real $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ e uma função vetorial de variável real $\mathbf{A} : I \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ temos que $: t \in I \mapsto \alpha(t)\mathbf{A}(t)$ é uma função vetorial de variável real e

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\alpha(t)\mathbf{A}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) . \quad (1.149)$$

Para a função real de variável real $t \in I \mapsto \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)$ e a função vetorial de variável real $t \in I \mapsto \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)$, temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{B}(t) \quad (1.150)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{B}(t) . \quad (1.151)$$

Dizemos que $\mathbf{A} : I \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ é **contínua em** $t_0 \in I$ se existe o limite de $\mathbf{A}(t)$ quando t tende a t_0 e, além disso, esse limite é igual a $\mathbf{A}(t_0)$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t_0) . \quad (1.152)$$

A função \mathbf{A} é dita **contínua no intervalo** I se ela é contínua em cada ponto de I .

Sejam $\mathbf{A} : I \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$, e, t e $t+h$ dois pontos de I . A **variação** de \mathbf{A} no intervalo de t a $t+h$ é $\mathbf{A}(t+h) - \mathbf{A}(t)$. Chamamos $[\mathbf{A}(t+h) - \mathbf{A}(t)]/h$ **taxa média de variação** de \mathbf{A} no dito intervalo. Se existe o limite dessa taxa média, quando h tende a zero, ele é chamado **derivada** de \mathbf{A} em t , e é representado por $d\mathbf{A}(t)/dt$,

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t+h) - \mathbf{A}(t)}{h}. \quad (1.153)$$

Se a variável real t representa o tempo, $d\mathbf{A}(t)/dt$ é chamada **taxa instantânea de variação** de \mathbf{A} no instante t e é também representada por $\dot{\mathbf{A}}(t)$.

Se a derivada de \mathbf{A} existe em cada ponto de I podemos definir a **função derivada** de \mathbf{A} como

$$\begin{aligned} d\mathbf{A}/dt : I &\longrightarrow \\ &: t \longmapsto d\mathbf{A}(t)/dt. \end{aligned} \quad (1.154)$$

A derivada da função $d\mathbf{A}/dt$ é representada por $d^2\mathbf{A}/dt^2$, a de $d^2\mathbf{A}/dt^2$, por $d^3\mathbf{A}/dt^3$, e assim sucessivamente. Se a variável t representa o tempo, a derivada de $\dot{\mathbf{A}}(t)$ também é representada por $\ddot{\mathbf{A}}(t)$.

Temos as seguintes propriedades de derivadas de funções vetoriais de variável real

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}, \quad (1.155)$$

$$\frac{d}{dt} [\alpha(t)\mathbf{A}(t)] = \frac{d\alpha(t)}{dt}\mathbf{A}(t) + \alpha(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}, \quad (1.156)$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \cdot \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} \quad (1.157)$$

e

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) \times \mathbf{A}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \times \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t) \times \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}. \quad (1.158)$$

De (1.157) obtemos um resultado muito útil e simples: se um vetor tem módulo constante, sua derivada é perpendicular a ele,

$$|\mathbf{A}(t)| = \text{constante} \implies \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \cdot \mathbf{A}(t) = 0. \quad (1.159)$$

Dada uma base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\vec{\mathcal{E}}$, fica associada a cada função vetorial de variável real $\mathbf{A} : I \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ uma trinca ordenada de funções reais de variável real,

$$\begin{aligned} A_i : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: t \longmapsto A_i(t) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.160)$$

definidas univocamente por

$$\mathbf{A}(t) = A_1(t)\mathbf{e}_1 + A_2(t)\mathbf{e}_2 + A_3(t)\mathbf{e}_3. \quad (1.161)$$

Dizemos que as funções reais A_1 , A_2 e A_3 são as componentes da função \mathbf{A} na base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Deve se ter em mente que os vetores da base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ não dependem de t . É possível considerar vetores que dependem de uma variável t e ainda assim formam uma base para qualquer valor dessa variável, mas eles não serão considerados nesta seção.

Podemos usar as três funções (1.160) para definir a seguinte função de I em \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &: t \longmapsto (A_1(t), A_2(t), A_3(t)) . \end{aligned} \quad (1.162)$$

Usando o isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ em \mathbb{R}^3 , definido em (1.117), podemos escrever

$$\bar{\mathbf{A}}(t) = \kappa_{\mathcal{B}}[\mathbf{A}(t)] \quad \text{e} \quad \mathbf{A}(t) = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1} [\bar{\mathbf{A}}(t)] . \quad (1.163)$$

Uma vez que as componentes do limite da função vetorial \mathbf{A} são os limites das correspondentes componentes dessa função, também temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{\mathbf{A}}(t) = \kappa_{\mathcal{B}} \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) \right] \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1} \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{\mathbf{A}}(t) \right] . \quad (1.164)$$

Desse modo, os conceitos infinitesimais associados à uma função vetorial \mathbf{A} têm contrapartidas simples para a função vetorial $\bar{\mathbf{A}}$ e as funções componentes A_i ($i = 1, 2, 3$). Assim, por exemplo, a função \mathbf{A} é contínua se, e somente se, são contínuas suas componentes, essa última condição, por sua vez, é equivalente à continuidade de $\bar{\mathbf{A}}$. Também temos que as componentes da derivada da função vetorial são as derivadas das respectivas componentes da função,

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{A_1(t)}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{A_2(t)}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{A_3(t)}{dt} \mathbf{e}_3 \quad (1.165)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{d\bar{\mathbf{A}}(t)}{dt} = \kappa_{\mathcal{B}} \left[\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \right] \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1} \left[\frac{d\bar{\mathbf{A}}(t)}{dt} \right] . \quad (1.166)$$

A conseqüência prática desses resultados é que podemos escolher fazer nossos cálculos infinitesimais com setas livres de $\vec{\mathcal{E}}$ e usar $\kappa_{\mathcal{B}}$ para transferir os resultados para o espaço vetorial \mathbb{R}^3 , ou fazer os cálculos infinitesimais com trincas de números em \mathbb{R}^3 e usar $\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}$ para transferir os resultados para o espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$.

Capítulo 2

Princípios da Mecânica Clássica

2.1 Protomecânica.

A Mecânica Clássica é uma **ciência da natureza** e, como tal, tem não somente suas leis, mas também seus conceitos fundamentais, obtidos de dados experimentais por meio de induções e abstrações. Nesta seção, explicitaremos conceitos e pressupostos sobre os quais se erigem os princípios da Mecânica Clássica. Tomamos como pressuposto mais fundamental que dispomos de um número ilimitado de **réguas** idênticas e **relógios** idênticos e que podemos medir qualquer comprimento e qualquer intervalo de tempo. As unidades de medida comumente usadas são as do Sistema Internacional (SI): o metro para comprimento e o segundo para tempo. Para evitar repetições, quando nos referirmos a réguas ou relógios ficará subentendido que são réguas idênticas e relógios idênticos, salvo menção explícita em contrário.

Usando uma régua podemos determinar as dimensões de um dado sistema ou subsistema físico. Chamamos **partícula** um corpo cujas dimensões são desprezíveis em um dado problema. Geometricamente, uma partícula é considerada como sendo um ponto; daí chamarmos uma partícula também **ponto material** ou **corpo puntiforme**. É importante notar que a caracterização de um corpo como partícula depende do problema em consideração; um mesmo corpo pode ser uma partícula em um problema e não o ser em outro. Ao estudarmos o movimento da Terra em torno do Sol, por exemplo, podemos considerar Sol e Terra como partículas, pois seus raios são cerca de, respectivamente, um milésimo e um centésimo de milésimo da distância média entre eles. Em contrapartida, para estudar o movimento diurno de rotação da Terra em torno de seu eixo, seria absurdo considerar a Terra como uma partícula, pois uma partícula, por definição, não dispõe de partes para rodar uma em torno da outra.

Em Mecânica Clássica pressupomos que qualquer **sistema físico** pode ser considerado como um conjunto de partículas. Com isso, consideramos como um sistema de partículas uma pedra, uma nuvem ou a Terra inteira. Também o sistema solar, uma

galáxia ou o universo inteiro podem ser considerados como um sistema de partículas. Para estudarmos as modificações que ocorrem em um sistema físico qualquer, em primeiro lugar consideramos o sistema com o um conjunto de partes tão pequenas que cada uma delas pode ser considerada como uma partícula. Depois estudamos os movimentos dessas partes para, através deles, explicar as modificações do sistema todo. Entretanto, esse método de análise tem uma limitação radical, uma vez que a consideração de partes cada vez menores de um corpo pode nos levar a problemas que escapam totalmente do domínio da Mecânica Clássica; de fato, quando as dimensões de um sistema aproximam-se do Angstrom (\AA) a Mecânica Clássica torna-se incapaz de descrevê-lo corretamente e deve ser substituída pela Mecânica Quântica.

Um **sistema rígido**, ou **corpo rígido**, é um sistema de partículas que mantêm entre si distâncias constantes. Como exemplo sugestivos de corpos rígidos podemos considerar um bloco de granito, ou o conjunto formado pelo piso, teto e paredes de uma sala. Não é necessário que um corpo rígido seja formado por uma distribuição contínua de matéria; pode ser formado por partículas separadas espacialmente entre si, como, por exemplo, as que formam a constelação do Cruzeiro do Sul.

Consideremos um corpo rígido com pelo menos quatro partículas não-coplanares. Suponhamos que estejam disponíveis réguas e relógios em números ilimitados, para realizarmos qualquer medição desejada, e que as distâncias entre as partículas desses instrumentos e as do corpo rígido permaneçam constantes. Descrevemos essa constância de distâncias dizendo que **réguas e relógios são imóveis em relação ao corpo rígido**, ou que **estão fixos no corpo rígido**. Usando réguas e relógios podemos definir um ponto do espaço como sendo **imóvel em relação ao corpo rígido** se a distância entre ele e os pontos do corpo rígido permanecem constantes. Dizemos que um subconjunto do espaço é **imóvel em relação ao corpo rígido** se todos os seus pontos são imóveis em relação a ele. O conjunto de todos os pontos do espaço imóveis em relação ao corpo rígido é chamado **corpo rígido estendido**. Identificamos o corpo rígido estendido com o Espaço Euclidiano \mathcal{E} . Supomos que as distâncias entre pontos desse espaço dadas pelas réguas definem uma função d como descrita em (1.1) e (1.2). Supomos, também, que todas as medições realizadas nesse espaço confirmam os postulados da Geometria Euclidiana. Nesse espaço podemos definir o conceito de seta e construir o espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$ dos deslocamentos em \mathcal{E} . Dizemos que tais deslocamentos são considerados em relação ao corpo rígido em tela. Todos os conceitos e resultados da Geometria Euclidiana são válidos nesse espaço $\vec{\mathcal{E}}$ associado ao corpo rígido, em particular os estudados no capítulo anterior.

Consideremos um sistema de eixos cartesianos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ imóvel em relação ao corpo rígido. Doravante, ao nos referirmos a um tal sistema, supomos que há uma base ordenada de $\vec{\mathcal{E}}$ associada a ele, de modo a termos um sistema de coordenadas cartesiano, tal como definido no capítulo 1. O sistema $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ imóvel em relação ao corpo rígido é dito um **sistema de eixos fixo no corpo rígido**. Note que o sistema de eixos não precisa interceptar o corpo rígido, pode mesmo estar distante dele; é exigido apenas que esteja imóvel em relação ao corpo rígido. Na figura 2.1, por exemplo, está ilustrado um corpo rígido, em relação ao qual tanto o sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ como o sistema $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ podem ser escolhidos como fixos.

Seja $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a base ordenada de um sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ fixo no

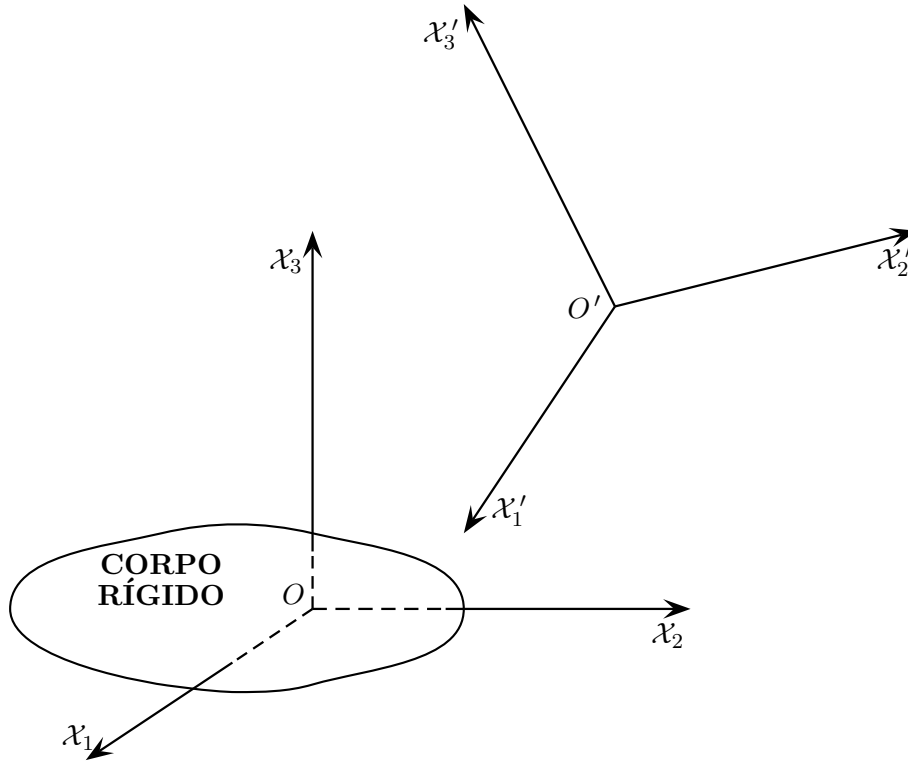


Figura 2.1: Dois sistemas de eixos cartesianos fixos a um corpo rígido, o sistema $Ox_1x_2x_3$ e o sistema $O'x'_1x'_2x'_3$.

corpo rígido. O sistema de coordenadas relativas a esse sistema de eixos, definidas pela base e a origem O , estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do Espaço Euclidiano \mathcal{E} e as trinças do espaço vetorial \mathbb{R}^3 . A correspondência é dada pela função bijetora definida em (1.127), *i.e.*,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &: P \longmapsto (x_1, x_2, x_3) . \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde (x_1, x_2, x_3) é a trinca de coordenada cartesianas de P relativas ao sistema de eixos $Ox_1x_2x_3$ fixo no corpo rígido. A trinca de coordenadas é o vetor-posição do ponto P relativo ao sistema de eixos $Ox_1x_2x_3$ fixo no corpo rígido. Como no capítulo anterior, denotamos por \bar{r} esse vetor e escrevemos

$$\mathcal{C}(P) = (x_1, x_2, x_3) = \bar{r} . \quad (2.2)$$

Suponhamos que os relógios fixos no corpo rígido estão todos sincronizados. Eles estabelecem uma correspondência biunívoca entre os instantes do tempo e os números reais. Dizemos que o número real t dá o **instante do tempo relativo ao corpo rígido** em consideração ou, simplesmente, que t é o **instante do tempo relativo ao corpo rígido**. A diferença entre os números reais associados ao início e final de um intervalo de tempo é chamada **duração do intervalo relativa ao corpo rígido**.

Os valores das distâncias e intervalos de tempo obtidos pelas réguas e relógios imóveis no corpo rígido são ditos medidos, observados ou tomados **em relação** ao corpo rígido e ao sistema de eixos em consideração. Para expressar essa possibilidade de medir distâncias e tempo em relação ao corpo rígido dizemos que há um **observador** no corpo rígido. Em particular, o observador pode, em qualquer tempo, confirmar a rigidez do corpo rígido no qual se encontra. Por brevidade, sempre que afirmarmos que há réguas e relógios fixos em um corpo rígido fica entendido que as réguas são idênticas entre si, os relógios são idênticos entre si e sincronizados, que esses instrumentos estão imóveis no corpo, são em número ilimitado e podem realizar medições em qualquer região do corpo rígido estendido.

Um **referencial**, por definição, é um corpo rígido no qual estão fixos um sistema de eixos, réguas e relógios. O corpo rígido, as réguas, os relógios, o sistema de eixos, cada um de seus eixos e sua origem, a base de vetores e o sistema de coordenadas cartesianas associados a ele, são todos ditos **do referencial** em questão. As coordenadas x_1 , x_2 e x_3 de um ponto, relativas ao sistema de eixos fixo no corpo rígido do referencial, tal como definidas em (2.1), são ditas **coordenadas do ponto relativas ao referencial**. Coerentemente com isso, o vetor-posição $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, dado em (2.2), é dito **vetor-posição do ponto relativo ao referencial**. Um instante do tempo relativo ao corpo rígido do referencial é dito **instante do tempo relativo ao referencial**.

Todas as observações, medições, conceitos e afirmações relativas a um referencial são também ditas **relativas a um observador fixo no referencial**. Podemos denotar um referencial pelo símbolo $\mathcal{R}ef$. Se o sistema de eixos do referencial $\mathcal{R}ef$ é $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$, é comum usá-lo para representar e denotar o referencial. Desse modo, nos referimos a um referencial $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$, ficando subtendidos o corpo rígido, as réguas e os relógios sincronizados. A figura 2.2 é uma ilustração de um referencial; nas figuras seguintes apenas o sistema de eixos será mostrado.

Chamamos **evento** ao que acontece em um dado ponto em um dado instante. Portanto, em cada referencial $\mathcal{R}ef$, há uma correspondência biunívoca entre os eventos e \mathbb{R}^4 , estabelecida de modo a associar a cada evento a quadra (x_1, x_2, x_3, t) , na qual x_1 , x_2 e x_3 são as coordenadas do ponto onde ocorre o evento no sistema de eixos de $\mathcal{R}ef$, e t dá o instante de ocorrência do evento nos relógios de $\mathcal{R}ef$.

A Terra é um corpo rígido freqüentemente usado como referencial. Experimentos são geralmente realizados em laboratórios fixos na Terra e nesses laboratórios fixamos um sistema de eixos e os relógios a serem utilizados. Podemos chamar **terrestres** os referenciais assim definidos. Os referenciais terrestres têm a vantagem óbvia de serem definidos no planeta no qual estamos. Por outro lado têm a desvantagem de serem referenciais em relação aos quais o movimento de certos sistemas é muito complicado, um exemplo sendo dado pelo movimento do Sol e dos demais planetas. Um outro tipo de referencial muito importante é o que usa o Sol e as estrelas fixas como corpo rígido e que é chamado referencial **copernicano**, em homenagem a Copérnico, que o propôs pela primeira vez, para estudar o movimento do sistema solar. Em relação a um referencial copernicano o movimento observado é muito mais simples do que o observado em relação a um referencial terrestre. De um referencial copernicano vemos o Sol parado enquanto os planetas descrevem trajetórias elípticas de acordo

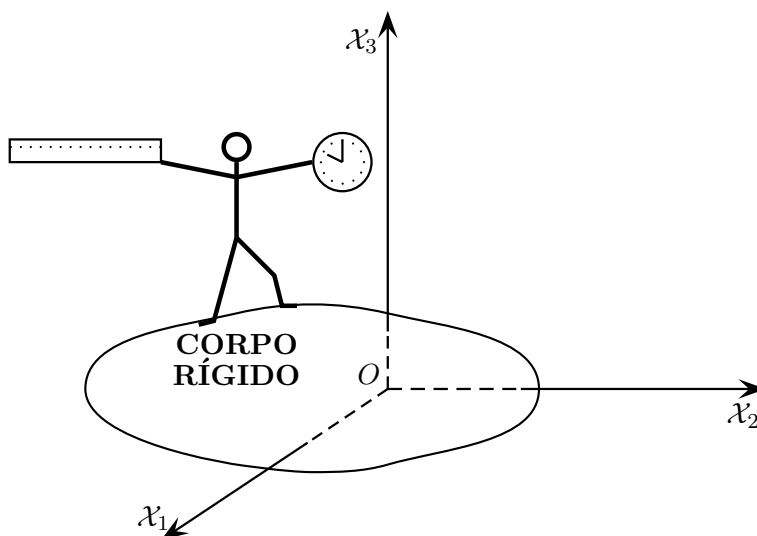


Figura 2.2: Um referencial com seu sistema de eixos $Ox_1x_2x_3$ e um observador munido de instrumentos de medição.

com as leis de Kepler. Referenciais copernicanos têm sobre os terrestres uma vantagem fundamental que será discutida posteriormente.

Por simplicidade, vamos trabalhar apenas com sistemas de eixos cartesianos ortogonais, dotados de bases ortonormais. No capítulo anterior, vimos que os cálculos simplificam-se sobremaneira com essa escolha e, além disso, em nosso estudo de mecânica não teremos necessidade de outros tipos de sistemas de eixos.

2.2 Princípios de cinemática

Seja um referencial \mathcal{R}_{ef} , com um sistema de eixos $Ox_1x_2x_3$ e base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. **Coordenadas de uma partícula relativas ao referencial \mathcal{R}_{ef}** , são as coordenadas relativas ao referencial \mathcal{R}_{ef} do ponto onde se encontra a partícula. **Vetor-posição de uma partícula relativo ao referencial \mathcal{R}_{ef}** , é o vetor-posição relativo ao referencial \mathcal{R}_{ef} do ponto onde se encontra a partícula. Representando por x_1 , x_2 e x_3 as coordenadas de uma partícula e por \vec{r} o seu vetor-posição, todos relativos ao referencial \mathcal{R}_{ef} , temos, obviamente,

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (2.3)$$

Por brevidade, também chamamos o vetor-posição de uma partícula, simplesmente, **posição da partícula**. Mesmo sendo evidente, é importante ressaltar que o vetor-posição de uma partícula é conceito relativo ao referencial em consideração; uma mesma partícula pode ter, em um dado instante, diferentes vetores-posição relativos a diferentes referenciais.

O **movimento de uma partícula relativo a um dado referencial** é completamente definido por uma função que determina, em cada instante do tempo durante

o movimento, o vetor-posição da partícula, sendo o tempo e o vetor-posição relativos ao referencial considerado. Mais especificamente, seja um referencial \mathcal{R}_{ef} e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto de tempo com instantes relativos a \mathcal{R}_{ef} ; um movimento da partícula relativo a \mathcal{R}_{ef} , durante o intervalo de tempo I , é definido por uma função $\bar{\phi}$ que associa a cada instante de tempo do intervalo I um vetor posição da partícula relativo ao referencial \mathcal{R}_{ef} ,

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ : t &\longmapsto \bar{r} \quad (I \subset \mathbb{R}) , \end{aligned} \quad (2.4)$$

ou seja

$$\bar{r} = \bar{\phi}(t) \quad (t \in I) . \quad (2.5)$$

Uma função como essa, que define um movimento da partícula relativamente ao referencial \mathcal{R}_{ef} , é chamada uma **função-movimento da partícula relativa ao referencial \mathcal{R}_{ef}** , ou simplesmente, um **movimento da partícula relativo ao referencial \mathcal{R}_{ef}** . Sendo a Mecânica um estudo do movimento, é natural que seus objetos de maior interesse sejam as funções-movimento. Podemos dizer que a Mecânica é o estudo das funções-movimento e seu problema fundamental consiste em determinar funções-movimento em cada circunstância dada.

Uma vez que a função-movimento (2.4) determina o vetor-posição (2.3) da partícula a cada instante do intervalo I , temos que as coordenadas da partícula ficam determinadas a cada instante desse intervalo,

$$(x_1, x_2, x_3) = \bar{\phi}(t) \quad (t \in I) . \quad (2.6)$$

Com isso, dada uma função-movimento $\bar{\phi}$, ficam automaticamente definidas três funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 ,

$$x_1 = \phi_1(t) , \quad x_2 = \phi_2(t) \quad \text{e} \quad x_3 = \phi_3(t) \quad (t \in I) , \quad (2.7)$$

por intermédio de

$$(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) = \bar{\phi}(t) \quad (t \in I) . \quad (2.8)$$

As funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são funções reais de variável real,

$$\begin{aligned} \phi_i : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : t &\longmapsto x_i \quad (I \subset \mathbb{R}) \quad (i = 1, 2, 3) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Podemos definir a trinca de funções (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) por meio de

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(t) := (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) \quad (t \in I) , \quad (2.10)$$

e obter de (2.8) que a função-movimento pode ser vista como uma trinca de funções,

$$\bar{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) . \quad (2.11)$$

Dizemos que as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são as **componentes da função-movimento $\bar{\phi}$** .

Trajatória do movimento de uma partícula ou, simplesmente, **trajetória da partícula, relativa a um referencial $\mathcal{R}ef$** , é a linha que a partícula traça no espaço durante seu movimento; mais formalmente: se a função-movimento é $\vec{\phi}$ a trajetória da partícula é a curva dada pelo conjunto de pontos $\vec{\phi}(I)$. A própria função-movimento $\vec{\phi}$ é a representação paramétrica da trajetória cujo parâmetro é o tempo. Particularmente importante em Mecânica são os movimentos que têm por trajetória uma reta ou parte de uma reta; são chamados **movimentos retilíneos**.

As funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são chamadas, respectivamente, movimento da partícula nas direções de $O\mathcal{X}_1$, $O\mathcal{X}_2$ e $O\mathcal{X}_3$; nesse caso dizemos que $\vec{\phi}$ é a **composição dos movimentos** ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 . Enquanto a partícula realiza o movimento $\vec{\phi}$ o ponto de coordenada x no eixo $O\mathcal{X}$ descreve o movimento retilíneo dado por ϕ_1 e, *mutatis mutandis*, para os pontos correspondentes nos outros dois eixos. Portanto, podemos afirmar que qualquer movimento de uma partícula é a composição de três movimentos retilíneos.

Notemos que, se as partículas são consideradas como impenetráveis, é possível identificar cada uma usando somente o seu vetor-posição, não importando qual o seu movimento.

É comum tomarmos o intervalo I do movimento como sendo \mathbb{R} , *i.e.*, considerarmos perpétuo o movimento. Nesse caso, as funções-movimento são funções de \mathbb{R} em \mathbb{R}^3 , e suas componentes são funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

Sejam dois vetores-posição de uma partícula relativos a um referencial $\mathcal{R}ef$, \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . A diferença $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ é um vetor de \mathbb{R}^3 que chamamos **deslocamento da partícula relativo a $\mathcal{R}ef$** , da posição \vec{r}_1 à posição \vec{r}_2 . Sejam t_1 e t_2 dois instantes distintos, nos quais as posições da partícula no movimento em consideração são \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , e Δt a duração do intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ no qual se processa o deslocamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Definimos **velocidade média da partícula relativa ao referencial $\mathcal{R}ef$** , no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, como sendo a razão $\Delta\vec{r}/\Delta t$.

Definimos **velocidade instantânea de uma partícula relativa a um referencial $\mathcal{R}ef$** , em um certo instante $t \in I$ de seu movimento, como sendo a derivada em relação ao tempo, nesse instante t , do vetor-posição da partícula relativo a $\mathcal{R}ef$. Denotando por \vec{v} tal velocidade, temos

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\phi}(t)}{dt}. \quad (2.12)$$

Naturalmente, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e é dada por

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad (2.13)$$

onde os elementos da trinca são as derivadas

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\phi_1(t)}{dt}, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\phi_2(t)}{dt} \quad \text{e} \quad v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \frac{d\phi_3(t)}{dt}. \quad (2.14)$$

A velocidade instantânea costuma ser chamada, simplesmente, velocidade.

Tendo em vista o significado da derivada, podemos dizer que a velocidade instantânea da partícula em um certo instante é o limite de sua velocidade média em

um intervalo que tende a esse instante. Naturalmente, não existe velocidade média nesse limite e, na prática experimental, tomamos a velocidade instantânea como sendo a velocidade média em um intervalo determinado pelo menor tempo mensurável.

Vamos usar também a notação de Newton, na qual a derivada em relação ao tempo é representada por um ponto sobre o símbolo do valor da função derivada. No caso da velocidade, temos

$$v_1 = \dot{x}_1, \quad v_2 = \dot{x}_2, \quad v_3 = \dot{x}_3 \quad \text{e} \quad \bar{v} = \dot{\bar{r}} \quad (2.15)$$

Vamos supor que a velocidade é bem definida em cada instante do movimento, *i.e.*, que a função-movimento $\bar{\phi}$ tem derivada em cada instante do intervalo de tempo I . Nesse caso, podemos definir a função que a cada instante de I associa a velocidade nesse instante. Denotando tal função por $\dot{\bar{\phi}}$, temos

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\phi}} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &: t \longmapsto \bar{v}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

ou seja

$$\bar{v} = \dot{\bar{\phi}}(t) \quad (t \in I). \quad (2.17)$$

Vamos chamar $\dot{\bar{\phi}}$ **função-velocidade da partícula relativa ao referencial \mathcal{R}_{ef}** . Essa função determina três funções que dão, a cada instante, as componentes da velocidade da partícula,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: t \longmapsto v_i \end{aligned} \quad (I \subset \mathbb{R}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.18)$$

Elas são ditas **componentes da função-velocidade $\dot{\bar{\phi}}$** , e escrevemos

$$\dot{\bar{\phi}} = (\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3). \quad (2.19)$$

Sejam \bar{v}_1 e \bar{v}_2 as velocidades da partícula em dois instantes distintos t_1 e t_2 , respectivamente. **Variação da velocidade da partícula relativa a \mathcal{R}_{ef}** , no intervalo de tempo $[t_1; t_2]$ é a diferença $\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ ($\Delta\bar{v} \in \mathbb{R}^3$). A razão entre essa variação e a duração $\Delta t = t_2 - t_1$ do intervalo é chamada **aceleração média da partícula relativa a \mathcal{R}_{ef}** , no intervalo $[t_1; t_2]$, *i.e.*, a aceleração média é o vetor de \mathbb{R}^3 dado por $\Delta\bar{v}/\Delta t$.

Definimos **aceleração instantânea de uma partícula relativa a um referencial \mathcal{R}_{ef} , em um certo instante $t \in I$** , como sendo a derivada em relação ao tempo, nesse instante t , da velocidade da partícula relativa a \mathcal{R}_{ef} . Denotando por \bar{a} a aceleração, temos

$$\bar{a} := \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\dot{\bar{\phi}}(t)}{dt}. \quad (2.20)$$

A aceleração \bar{a} é a trinca de \mathbb{R}^3 dada por

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad (2.21)$$

onde os elementos da trinca são as derivadas

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d\dot{\phi}_1(t)}{dt}, \quad a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{d\dot{\phi}_2(t)}{dt} \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{dv_3}{dt} = \frac{d\dot{\phi}_3(t)}{dt}. \quad (2.22)$$

Em notação de Newton, temos

$$a_1 = \dot{v}_1, \quad a_2 = \dot{v}_2, \quad a_3 = \dot{v}_3 \quad \text{e} \quad \bar{a} = \dot{\bar{v}}. \quad (2.23)$$

A aceleração instantânea costuma ser chamada, simplesmente, aceleração.

Supondo que a derivada de $\dot{\phi}$ exista em cada instante do intervalo I , temos a função

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &: t \longmapsto \bar{a}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

ou seja

$$\bar{a} = \ddot{\phi}(t) \quad (t \in I). \quad (2.25)$$

A função $\ddot{\phi}$ é chamada **função-aceleração da partícula relativa ao referencial $\mathcal{R}ef$** . A função $\ddot{\phi}$ determina três funções que dão, a cada instante, as componentes da aceleração da partícula,

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_i : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: t \longmapsto a_i \quad (I \subset \mathbb{R}) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Elas são ditas **componentes da função-aceleração** $\ddot{\phi}$, e escrevemos

$$\ddot{\phi} = (\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \ddot{\phi}_3). \quad (2.27)$$

Naturalmente, a aceleração é a derivada segunda em relação ao tempo do vetor-posição e, na notação de Newton, é escrita como $\ddot{\bar{r}}$. Portanto,

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \bar{\phi}(t)}{dt^2}. \quad (2.28)$$

A derivada temporal da aceleração e demais derivadas superiores do vetor-posição não recebem nomes especiais porque, como veremos, não desempenham um papel fundamental na Mecânica Newtoniana.

Apresentamos as grandezas cinemáticas fundamentais da Mecânica Newtoniana, quais sejam, vetor-posição \bar{r} , tempo e função-movimento, velocidade \bar{v} e aceleração \bar{a} . As grandezas \bar{r} , \bar{v} e \bar{a} são trincas no espaço vetorial \mathbb{R}^3 , definidas em relação a um dado referencial $\mathcal{R}ef$. Agora, introduziremos setas livres de $\vec{\mathcal{E}}$ para representar essas grandezas cinemáticas. Elas têm a vantagem de serem objetos geométricos e, com isso, de atribuir um significado geométrico às grandezas cinemáticas. No entanto, elas não têm o significado imediato de grandezas relativas a um dado referencial; é necessário expandí-las na base do referencial para obter as grandezas que têm esse

significado, \bar{r} , \bar{v} e \bar{a} . A propósito dessas distinções, convém recordar a discussão feita em torno de (1.131).

Vetor-posição \mathbf{r} de uma partícula relativo à origem de um referencial $\mathcal{R}ef$ é o vetor-posição do ponto onde a partícula se encontra relativo à origem do referencial. Portanto, é o vetor de $\vec{\mathcal{E}}$ representado por uma seta que sai da origem do sistema de eixos do referencial e vai até a partícula. Também nos referimos a \mathbf{r} , abreviadamente, como a posição da partícula relativa à origem do referencial. Expandindo o vetor-posição na base do referencial, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, temos que suas componentes são as coordenadas da partícula relativas a esse referencial,

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 . \quad (2.29)$$

Essas coordenadas formam o vetor-posição $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$ relativo ao referencial. Desse modo, o vetor posição da partícula relativo à origem do referencial, \mathbf{r} , determina o vetor-posição relativo ao referencial, \bar{r} . A relação formal entre esses dois tipos de vetores-posição é dada pelo isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$, definido em (1.117), desde que tomemos a base \mathcal{B} como sendo a base do referencial $\mathcal{R}ef$ em consideração. Esse isomorfismo permite transformar vetores de $\vec{\mathcal{E}}$ em vetores de \mathbb{R}^3 e vice-versa; no caso em consideração, temos

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}) = \kappa_{\mathcal{B}}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = (x_1, x_2, x_3) = \bar{r} \quad (2.30)$$

e

$$\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{r}) = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{r} . \quad (2.31)$$

Os dois vetores-posição da partícula, \bar{r} e \mathbf{r} , podem ser ilustrados pela figura 1.16 do capítulo anterior, desde que consideremos a partícula localizada no ponto P da figura. Nela, temos a trinca de coordenadas x_1 , x_2 e x_3 que determina \bar{r} e a seta de \mathcal{O} a P que determina \mathbf{r} .

Seja um movimento da partícula que se processa em um intervalo de tempo I . A cada instante t desse intervalo corresponde um único vetor-posição \mathbf{r} relativo à origem do referencial $\mathcal{R}ef$ em consideração. .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} : I &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ &: t \longmapsto \mathbf{r} . \end{aligned} \quad (2.32)$$

i.e.,

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\phi}(t) \quad (t \in I) . \quad (2.33)$$

Dizemos que $\boldsymbol{\phi}$ é a **função-movimento da partícula relativa à origem do referencial $\mathcal{R}ef$** . Expandindo \mathbf{r} em (2.33) na base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathcal{R}ef$ obtemos a expressão $\boldsymbol{\phi}(t) = x_1 + \mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, na qual x_1 , x_2 e x_3 são as coordenadas da partícula no instante t . De acordo com (2.7) elas são dadas pelas funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , de modo que

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \phi_1(t)\mathbf{e}_1 + \phi_2(t)\mathbf{e}_2 + \phi_3(t)\mathbf{e}_3 . \quad (2.34)$$

Desse modo, a função $\boldsymbol{\phi}$ determina as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 que especificam o movimento. A expressão (2.34) deve ser comparada à expressão (2.8), na qual $\bar{\phi}$ é a

própria trinca de ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 . A relação explícita entre $\boldsymbol{\phi}$ e $\bar{\phi}$ pode ser obtida usando (2.31) e (2.33). Temos $\mathbf{r} = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{\mathbf{r}}) = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{\phi}(t))$ ($\forall t \in I$), *i.e.*, $\boldsymbol{\phi} = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \bar{\phi}$ ou, equivalentemente, $\bar{\phi} = \kappa_{\mathcal{B}} \circ \boldsymbol{\phi}$. Desse modo, a função-movimento relativa ao referencial é a composta da função-movimento relativa à origem do referencial com o isomorfismo de $\vec{\mathcal{E}}$ em \mathbb{R}^3 .

Sejam dois vetores-posição de uma partícula relativos à origem \mathcal{O} de um referencial \mathcal{R}_{ef} , \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . A diferença $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ é um vetor de $\vec{\mathcal{E}}$ que chamamos **deslocamento da partícula relativo à origem de \mathcal{R}_{ef}** , da posição \mathbf{r}_1 à posição \mathbf{r}_2 . Usando o vetor $\Delta\mathbf{r}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ podemos associar ao deslocamento de uma partícula um comprimento, uma direção e um sentido, os da seta livre $\Delta\mathbf{r}$. Dizemos que a partícula desloca-se de uma distância $|\Delta\mathbf{r}|$ na direção e sentido de $\Delta\mathbf{r}$. Usando a linearidade (1.119) do isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$, obtemos as relações

$$\Delta\mathbf{r} = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\Delta\bar{\mathbf{r}}) \quad \text{e} \quad \Delta\bar{\mathbf{r}} = \kappa_{\mathcal{B}}(\Delta\mathbf{r}), \quad (2.35)$$

nas quais $\Delta\bar{\mathbf{r}}$ é o deslocamento relativo ao referencial \mathcal{R}_{ef} . Sejam t_1 e t_2 dois instantes distintos, nos quais as posições da partícula no movimento em consideração são \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , e Δt a duração do intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ no qual se processa o deslocamento $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Definimos **velocidade média da partícula relativa ao ponto \mathcal{O}** , no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, como sendo a razão $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$. Essa velocidade média está relacionada com a velocidade média relativa a \mathcal{R}_{ef} por $\Delta\mathbf{r}/\Delta t = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\Delta\bar{\mathbf{r}}/\Delta t)$. Sendo um vetor de $\vec{\mathcal{E}}$, a velocidade média $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ tem um módulo, uma direção e um sentido.

Definimos **velocidade instantânea da partícula relativa à origem \mathcal{O} de um referencial \mathcal{R}_{ef}** , em um certo instante $t \in I$, como sendo o derivada em relação ao tempo no instante t , do vetor posição da partícula relativo à origem \mathcal{O} de \mathcal{R}_{ef} . Denotando por \mathbf{v} essa velocidade, temos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\phi}(t)}{dt} \quad (2.36)$$

Em geral omitimos o adjetivo “instantânea” quando nos referimos a essa velocidade. Pela definição de derivada, temos que a velocidade tem a direção da tangente à trajetória da partícula no ponto onde se encontra a partícula e aponta no sentido em que a partícula se move nesse ponto da trajetória.

Usando, agora, a propriedade (1.166) do isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$, obtemos a relação entre essa velocidade e a velocidade relativa a \mathcal{R}_{ef} , $\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \kappa_{\mathcal{B}}(d\mathbf{r}/dt) = d\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{r})/dt = d\bar{\mathbf{r}}/dt = \bar{\mathbf{v}}$. Temos

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \kappa_{\mathcal{B}}(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) = (v_1, v_2, v_3) = \bar{\mathbf{v}} \quad (2.37)$$

ou, equivalentemente,

$$\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{\mathbf{v}}) = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}, \quad (2.38)$$

onde v_1 , v_2 e v_3 são dadas em (2.14). Desse modo, também podemos escolher trabalhar com a trinca $\bar{\mathbf{v}}$ de \mathbb{R}^3 ou com a seta livre \mathbf{v} de $\vec{\mathcal{E}}$. Essa última, no entanto, tem as propriedades geométrica módulo, direção e sentido. Dizemos que o módulo $|\mathbf{v}|$ da

velocidade dá a **rapidez**, ou **celeridade**, da partícula no instante em consideração, e a direção e o sentido da velocidade \mathbf{v} dão a direção e o sentido do movimento da partícula nesse instante, respectivamente.

A velocidade \mathbf{v} é dada em um instante arbitrário pela função

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\phi}}: I &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ : t &\longmapsto \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

i.e.,

$$\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \quad (t \in I), \quad (2.40)$$

supondo que a derivada exista em todo o intervalo I . Chamamos **$\dot{\boldsymbol{\phi}}$ função-velocidade da partícula relativa à origem \mathcal{O} do referencial $\mathcal{R}ef$** . Usando a propriedade (1.166) do isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$, obtemos a relação entre as duas funções-velocidade, $\dot{\boldsymbol{\phi}} = \kappa_{\mathcal{B}} \circ \dot{\boldsymbol{\phi}}$ ou, equivalentemente, $\dot{\boldsymbol{\phi}} = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \dot{\boldsymbol{\phi}}$. Temos

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \dot{\phi}_1(t)\mathbf{e}_1 + \dot{\phi}_2(t)\mathbf{e}_2 + \dot{\phi}_3(t)\mathbf{e}_3, \quad (2.41)$$

onde as funções $\dot{\phi}_1$, $\dot{\phi}_2$ e $\dot{\phi}_3$ são os elementos da trinca (2.19).

Se as velocidades de uma partícula relativas à origem do referencial $\mathcal{R}ef$ em consideração forem aplicadas em um mesmo ponto do espaço suas extremidades finais geram uma linha chamada **hodógrafa** do movimento; obviamente, a hodógrafa de um movimento $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ é a curva definida pela função-velocidade $\dot{\boldsymbol{\phi}}$.

Sejam \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 as velocidades da partícula relativas à origem do referencial em dois instantes distintos t_1 e t_2 , respectivamente. **Variação da velocidade da partícula relativa a origem de $\mathcal{R}ef$** , no intervalo de tempo $[t_1; t_2]$ é a diferença $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ ($\Delta\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}$). A razão entre essa variação e a duração $\Delta t = t_2 - t_1$ do intervalo é chamada **aceleração média da partícula relativa à origem de $\mathcal{R}ef$** , no intervalo $[t_1; t_2]$, *i.e.*, a aceleração média relativa à origem é o vetor de $\vec{\mathcal{E}}$ dado por $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$.

Definimos **aceleração instantânea de uma partícula em relativa à origem \mathcal{O} de um referencial $\mathcal{R}ef$** , em um certo instante $t \in I$, como sendo a derivada da velocidade da partícula em relação ao tempo, no instante t . Denotando por \mathbf{a} essa aceleração, temos

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)}{dt}. \quad (2.42)$$

Usualmente, nos referimos a essa aceleração instantânea, simplesmente, como aceleração. A aceleração relativa à origem, sendo um vetor de $\vec{\mathcal{E}}$, tem módulo, direção e sentido. Pela definição de derivada, o módulo da aceleração em um certo instante dá a rapidez com que varia a velocidade nesse instante, e a direção e o sentido são aqueles nos quais varia a velocidade no instante em tela. Também pela definição de derivada temos que, nos pontos em que a trajetória da partícula se curva, é para o lado do encurvamento que aponta a aceleração \mathbf{a} , e nunca para o lado oposto.

Usando o isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$, obtemos a relação entre essa aceleração e a aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ relativa a $\mathcal{R}ef$,

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) = \kappa_{\mathcal{B}}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) = (a_1, a_2, a_3) = \bar{\mathbf{a}} \quad (2.43)$$

ou, equivalentemente,

$$\kappa_B^{-1}(\bar{\mathbf{a}}) = \kappa_B^{-1}(a_1, a_2, a_3) = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}, \quad (2.44)$$

onde a_1 , a_2 e a_3 são dadas em (2.22).

Temos a função

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\phi}} : I &\longrightarrow \bar{\mathcal{E}}^3 \\ &: t \longmapsto \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

i.e.,

$$\mathbf{a} = \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) \quad (t \in I), \quad (2.46)$$

supondo que a derivada (2.42) exista em todo o intervalo I . Chamamos **$\ddot{\boldsymbol{\phi}}$ função-aceleração da partícula relativa à origem \mathcal{O} do referencial $\mathcal{R}ef$** . Usando a propriedade (1.166), obtemos a relação entre essa função e a função-velocidade relativa a $\mathcal{R}ef$, $\dot{\boldsymbol{\phi}} = \kappa_B \circ \ddot{\boldsymbol{\phi}}$ ou, equivalentemente, $\ddot{\boldsymbol{\phi}} = \kappa_B^{-1} \circ \dot{\boldsymbol{\phi}}$. Temos

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \ddot{\phi}_1(t) \mathbf{e}_1 + \ddot{\phi}_2(t) \mathbf{e}_2 + \ddot{\phi}_3(t) \mathbf{e}_3, \quad (2.47)$$

onde as funções $\ddot{\phi}_1$, $\ddot{\phi}_2$ e $\ddot{\phi}_3$ são os elementos da trinca (2.27).

Usando o conceito de derivada segunda e a notação de Newton podemos escrever

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.48)$$

Vamos representarmos as coordenadas da partícula x_1 , x_2 e x_3 também por x , y e z , e as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , também por ϕ_x , ϕ_y e ϕ_z , respectivamente. Com isso, escrevemos

$$x = \phi_x(t), \quad y = \phi_y(t) \quad \text{e} \quad z = \phi_z(t), \quad (2.49)$$

e as demais expressões envolvendo essas coordenadas podem ser adaptadas de modo natural a essa notação alternativa.

Agora, consideremos um sistema com suas partículas numeradas de 1 a N e um referencial $\mathcal{R}ef$ em relação ao qual esse sistema é observado. Se os vetores-posição das partículas relativos a $\mathcal{R}ef$ são dados, respectivamente, por $\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2, \dots, \bar{\mathbf{r}}_N$, dizemos que $(\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2, \dots, \bar{\mathbf{r}}_N)$ é o **vetor-configuração do sistema relativo a $\mathcal{R}ef$** . Se as respectivas velocidades das partículas relativas a $\mathcal{R}ef$ são $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_N$, dizemos que $(\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_N)$ é a **distribuição de velocidades do sistema relativa a $\mathcal{R}ef$** . Se as respectivas acelerações das partículas relativas a $\mathcal{R}ef$ são $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_N$, dizemos que $(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_N)$ é a **distribuição de acelerações do sistema relativa a $\mathcal{R}ef$** . Se no intervalo de tempo I as funções-movimento das partículas relativas a $\mathcal{R}ef$ são, respectivamente, $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_N$, chamamos a N -upla ordenada de funções $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_N)$ **função-movimento do sistema relativo a $\mathcal{R}ef$ no intervalo de tempo I** ou, simplesmente, **movimento do sistema relativo a $\mathcal{R}ef$ no intervalo de tempo I** . Naturalmente, essa N -upla de funções especifica em cada instante do intervalo a configuração do sistema. Os vetores-configuração de um sistema são elementos de \mathbb{R}^{3N} , e o mesmo se pode dizer de suas distribuições de velocidades e de acelerações. Representando

o vetor-configuração, a distribuição de velocidades e a de acelerações por \bar{r} , \bar{v} e \bar{a} , temos, portanto, que $\bar{r}, \bar{v}, \bar{a} \in \mathbb{R}^{3N}$.

A cada vetor-configuração corresponde uma única N -upla de pontos em \mathcal{E} , isto é, um elemento de \mathcal{E}^N ; são os pontos ocupados pelas partículas do sistema. Cada uma dessas N -uplas de pontos é chamada uma **configuração do sistema de partículas**. O conjunto de todas as configurações possíveis do sistema é chamado **espaço de configurações do sistema**. Por simplicidade, supõe-se que o espaço de configuração de um sistema de partículas é \mathcal{E}^N , *i.e.*, todos os elementos de \mathcal{E}^N são possíveis configurações do sistema. Nesse caso estamos abrindo mão da hipótese da impenetrabilidade das partículas, pois há elementos de \mathcal{E}^N com pontos repetidos, o que significa que há configurações do sistema com duas partículas ocupando o mesmo ponto. Uma suposição mais realista, que adotaremos, é que o espaço de configurações do sistema é um aberto \mathcal{U} de \mathcal{E}^N ; naturalmente, essa suposição engloba a anterior, pois \mathcal{E}^N é um de seus abertos. Sobre as distribuições de velocidades não há restrições; supomos que todos os elementos de \mathbb{R}^{3N} são possíveis distribuições de velocidades do sistema. Quanto às distribuições de acelerações, não há necessidade de nenhuma suposição, por motivos que ficarão claros posteriormente. Por simplicidade, vamos também nos referir a $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N)$ como uma configuração do sistema, em vez de dizer que $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N)$ é um vetor-configuração que especifica uma configuração do sistema.

Se os vetores-posição das partículas relativos à origem de $\mathcal{R}ef$ são, respectivamente, por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, dizemos que $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ é a **configuração do sistema relativa à origem de $\mathcal{R}ef$** . Se as respectivas velocidades das partículas relativas à origem de $\mathcal{R}ef$ são $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$, dizemos que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$ é a **distribuição de velocidades do sistema relativa à origem de $\mathcal{R}ef$** . Se as respectivas acelerações das partículas relativas à origem de $\mathcal{R}ef$ são $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$, dizemos que $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N)$ é a **distribuição de acelerações do sistema relativa à origem de $\mathcal{R}ef$** . Se no intervalo de tempo I as funções-movimento das partículas relativas à origem de $\mathcal{R}ef$ são, respectivamente, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$, chamamos a N -upla ordenada de funções $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ **função-movimento do sistema relativa à origem de $\mathcal{R}ef$** no intervalo de tempo I ou, simplesmente, **movimento do sistema relativo à origem de $\mathcal{R}ef$** no intervalo de tempo I . Escrevendo $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$ e $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N)$, temos $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a} \in \bar{\mathcal{E}}^{\rightarrow N}$. Seja \mathcal{B} a base de $\mathcal{R}ef$. Podemos passar de elementos de $\bar{\mathcal{E}}^{\rightarrow N}$ para elementos de \mathbb{R}^{3N} usando o isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$, *e.g.*, $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N) = (\kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}_1), \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}_2), \dots, \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}_N))$. Naturalmente, $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = (\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{r}_1), \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{r}_2), \dots, \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{r}_N))$. A função-movimento do sistema relativas a $\mathcal{R}ef$ e a correspondente relativa à origem de $\mathcal{R}ef$ também se relacionam pelo isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$, $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_N) = (\kappa_{\mathcal{B}}(\phi_1), \kappa_{\mathcal{B}}(\phi_2), \dots, \kappa_{\mathcal{B}}(\phi_N))$ e $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) = (\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{\phi}_1), \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{\phi}_2), \dots, \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(\bar{\phi}_N))$.

Os conceitos fundamentais de posição, velocidade e aceleração de uma partícula foram definidos relativamente a um referencial, por meio de vetores de \mathbb{R}^3 , e relativamente à origem do referencial, por meio de vetores de $\bar{\mathcal{E}}^{\rightarrow}$. Doravante, daremos preferência aos últimos, sempre que possível, pois possuem significados geométricos que facilitam a análise dos movimentos. Quando houver necessidade de considerar os movimentos da partícula em relação a diferentes referenciais, usaremos os vetores de \mathbb{R}^3 . O isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$ estará sempre a disposição para fazermos a transição de \mathbb{R}^3

para $\vec{\mathcal{E}}$ e vice-versa. Nem sempre qualificaremos explicitamente os conceitos como relativos a um referencial ou à sua origem, deixando que a notação e o contexto indiquem do qual se trata em cada caso.

Definimos **partícula livre**, ou **isolada**, como sendo uma partícula infinitamente afastada de todos os outros corpos do universo. Definimos **referencial inercial** como sendo um referencial relativo ao qual são constantes as velocidades de alguma trinca de partículas livres não-colineares. Desse modo, quando observadas de um referencial inercial, cada partícula livre da trinca é vista em repouso ou em movimento retilíneo uniforme; podemos, equivalentemente, dizer que é vista com aceleração nula.

Antes de seguir adiante, é muito importante notar que as definições dadas neste capítulo são idealizadas, como sói acontecer em toda a Física. Na prática, temos de considerá-las de modo aproximado. Assim, por exemplo, uma partícula é um corpo que, em uma situação prática, tem dimensões aproximadamente desprezíveis e não exatamente desprezíveis. Do mesmo modo consideramos como livre uma partícula que esteja imensamente afastada de todos os outros corpos e não uma que esteja infinitamente afastada, pois o afastamento infinito é uma idealização impossível de ser observada no universo. Tomemos ainda, como exemplo, o conceito de referencial inercial. Na prática, aceitamos um referencial como inercial se dele as partículas de uma trinca de partículas livres e não-colineares forem observadas com acelerações que podem ser consideradas como muito pequenas. Os outros conceitos podem ser analisados de modo análogo ao dos três exemplos deste parágrafo. Finalizemos observando que, apesar de serem usados de modo aproximado, os conceitos e as leis que enunciamos são apresentados idealizadamente como exatos, para simplificar a teoria e porque não é possível, *a priori*, formular critérios gerais de aproximação, sendo necessário escolhê-los em cada situação concreta particular e verificar, *a posteriori*, o acerto da escolha.

2.3 Princípios de dinâmica

A Mecânica Clássica baseia-se em algumas leis fundamentais induzidas de observações e experimentos. Tais leis relacionam o movimento de uma partícula com os corpos que o influenciam. Essas leis são aqui chamadas princípios.

- 1^o) **Princípio da inércia:** *Existem partículas livres e referenciais inerciais; em relação a um referencial inercial qualquer partícula livre está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.*

Aceitamos como um exemplo de partícula livre qualquer uma das estrelas fixas. Desse modo, podemos escolher três estrelas não-colineares, no Cruzeiro do Sul, por exemplo, e usá-las para determinar se um dado referencial é ou não inercial. Com isso, encontramos, imediatamente, o referencial copernicano como exemplo de referencial inercial.

Se um referencial é inercial, três partículas livres não-colineares foram observadas com acelerações nulas em relação a ele, por definição. O princípio da inércia acrescenta que qualquer outra partícula livre também é observada com aceleração nula em relação a esse referencial. Conseqüentemente, se uma partícula livre tem aceleração relativa a um referencial, ele não é inercial.

Os referenciais terrestres, a rigor, não são inerciais, pois deles as estrelas fixas são observadas com aceleração, pois, movendo-se em trajetórias circulares. Entretanto, em um número imenso de situações, particularmente em movimentos cuja duração é curta comparada com um dia, podemos considerar os referenciais terrestres como aproximadamente inerciais. No entanto, há fatos, além do movimento das estrelas fixas observado da Terra, que mostram, claramente, que os referenciais terrestres não são inerciais.

Embora não seja explicitamente afirmado nos princípios enunciados a seguir, devemos supor (e enfatizar) que eles são enunciados do ponto de vista de um observador em um referencial inercial. Dizemos que são princípios válidos em um referencial inercial.

2^o) **Princípio do determinismo newtoniano:** *Existem sistemas nos quais o movimento de cada uma de suas partículas é determinado univocamente pelas posições e velocidades de todas as suas partículas em um instante fixo qualquer; qualquer sistema de partículas que não tenha essa propriedade é parte de um sistema que a tem.*

Um sistema com a propriedade enunciada nesse princípio é dito **isolado**. Portanto, dadas em algum instante do tempo a configuração e a distribuição de velocidades de um sistema isolado, o movimento que o sistema realiza fica univocamente determinado. Seja $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ um vetor-configuração de um sistema de N partículas e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$ uma de suas distribuições de velocidades; a $6N$ -upla de vetores formada pelas posições e velocidades das partículas do sistema, $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$, é chamada um **estado dinâmico do sistema**. O princípio do determinismo newtoniano também pode ser enunciado na forma: o movimento de cada partícula de um sistema isolado é univocamente determinado pelo estado dinâmico do sistema em um instante fixo qualquer.

No contexto desse princípio, o instante fixo em que são dadas as posições e velocidades das partículas do sistema é chamado **instante inicial**. As posições e velocidades são chamadas **posições iniciais** e **velocidades iniciais**, respectivamente. Posições e velocidades iniciais são chamadas, conjuntamente, **condição inicial do sistema**. Finalmente, o estado dinâmico dado no instante inicial é chamado **estado dinâmico inicial**. Obviamente, condição inicial do sistema é apenas um outro nome para estado dinâmico do sistema no contexto do princípio do determinismo newtoniano. Com isso, podemos dizer que o movimento de cada partícula de um sistema isolado é univocamente determinado pela condição inicial do sistema em um instante fixo qualquer.

As funções-movimento de uma partícula são funções totalmente arbitrárias que associam a cada instante de um intervalo de tempo I a posição da partícula nesse instante. Não supomos que todas essas funções descrevem movimentos que uma partícula de fato realiza ou pode realizar. A única restrição imposta às funções-movimento, quando queremos definir velocidade e aceleração da partícula, é que elas têm derivada até a segunda ordem. Os movimentos definidos por essas funções-movimento arbitrárias são chamados **movimentos virtuais da partícula**. Uma N -upla arbitrária de funções-movimento arbitrárias define um movimento do sistema. Também esses movimentos do sistema são funções arbitrárias que associam uma única configuração do sistema a cada instante de algum intervalo de tempo I . Esses movimentos são genericamente chamados **movimentos virtuais do sistema**. Os movimentos virtuais do sistema são formados por N -uplas de movimentos virtuais das N partículas do sistema. Obviamente, há uma infinidade de movimentos virtuais de um sistema. Dentre eles, vamos selecionar os que satisfazem uma dada condição inicial, *i.e.*, os que em um certo instante inicial têm suas partículas com as posições e velocidades especificadas pela condição inicial dada. Também há uma infinidade de movimentos virtuais que satisfazem essa condição inicial. O princípio do determinismo newtoniano afirma que, para um sistema isolado, dentre essa infinidade de movimentos, existe um único que o sistema de fato realiza. Esse é qualificado como o **movimento real do sistema** sob a condição inicial especificada. Naturalmente, o conjunto de todos os movimentos reais do sistema é dado pelo conjunto de todas as condições iniciais possíveis. Para gerar todas as condições iniciais possíveis consideramos cada instante do tempo como inicial e, em cada um deles, consideramos todos os estados dinâmicos possíveis como condições iniciais. Os movimentos reais do sistema também são chamados **movimentos possíveis do sistema**, pois são os movimentos do sistema possíveis de serem observados na realidade; o sistema os realiza desde que tenham a condição inicial apropriada. Todos os demais movimentos virtuais são ditos movimentos impossíveis do sistema. O problema fundamental da Mecânica Clássica é justamente determinar quais são os movimentos possíveis de um sistema isolado.

Podemos nos perguntar sobre a necessidade de considerar os movimentos impossíveis na teoria. Uma resposta é que é necessário porque não conhecemos de antemão quais são os movimentos possíveis e quais são os impossíveis; há necessidade de um conjunto amplo de movimentos dentre os quais as leis da Mecânica permitirão selecionar os possíveis. No entanto, há razões mais profundas, às quais voltaremos oportunamente. Veremos, então, que os movimentos virtuais impossíveis são essenciais em formulações mais avançadas da Mecânica Clássica e mesmo em uma das formulações da Mecânica Quântica.

Estaremos considerando sistemas isolados com a propriedade de que as variáveis de seu estado dinâmico são independentes, *i.e.*, para qualquer configuração possível, dada em um aberto de \mathbb{R}^{3N} , é possível qualquer distribuição de velocidades, que pode ser um elemento qualquer de \mathbb{R}^{3N} .

Notemos a peculiaridade do princípio do determinismo newtoniano. Não é suficiente a configuração do sistema isolado, em um dado instante, para determinar o movimento real do sistema; é necessário fornecer, nesse instante, também sua distribuição de velocidades. Além disso, a configuração e a distribuição de velocidades

são suficientes; não é necessário fornecer a distribuição de acelerações ou de derivadas ainda mais altas das posições.

É possível que um subsistema de um sistema isolado seja isolado. Nesse caso, os movimentos do subsistema são determinados apenas pelas condições iniciais de suas partículas, sem necessidade das condições iniciais para as partículas do restante do sistema. Dizemos, então, que o restante do sistema **não influencia os movimentos do subsistema**, ou que **as partículas do restante do sistema não influenciam os movimentos do subsistema**. Em contrapartida, se o subsistema não é fechado, dizemos que o restante do sistema **influencia os movimentos do subsistema**. As partículas que influenciam um subsistema de um sistema isolado formam a chamada **vizinhança** do subsistema. Ao considerar um sistema isolado, faremos a hipótese de que todas as suas partículas influenciam o movimento das demais. Essa suposição indica que sempre procuramos considerar sistema isolados com um número mínimo de partículas.

Uma partícula de um sistema isolado tem por vizinhanças as demais partículas do sistema. Em um movimento possível do sistema, cada uma de suas partículas realiza um movimento que chamamos um **movimento possível da partícula** na vizinhança constituída pelas demais. Se um movimento virtual da partícula jamais é realizado, em nenhum dos movimentos possíveis do sistema, dizemos que ele é um **movimento impossível da partícula** na vizinhança constituída pelas demais.

Uma vez que o movimento de cada partícula de um sistema isolado está univocamente determinado pelas condições iniciais, um movimento virtual de uma partícula pode ou não ser possível quando ela faz parte de um sistema isolado específico. Considere, por exemplo, uma pedrinha lançada para cima dentro de uma sala fechada (para evitarmos o elemento complicador do vento). Podemos considerar que a pedrinha e a Terra formam um sistema isolado (o ar circundante na sala não tem, normalmente, influência sobre a pedrinha e a Terra). A Terra puxa a bolinha para baixo e ela descreve uma trajetória parabólica. Esse é um movimento possível da bolinha na presença da Terra. Jamais se observa a bolinha jogada para cima descrever um círculo no interior da sala, digamos em um movimento circular com o raio de um palmo. Esse é um movimento virtual impossível para a bolinha na vizinhança em que se encontra, constituída por Terra. É claro que a bolinha pode ser posta em movimento circular se for presa na extremidade de um fio. Mas, nesse caso, o sistema isolado é outro, pois inclui também o fio. A bolinha teria uma vizinhança diferente e, conseqüentemente, mudaria o que é ou não um movimento possível para ela. Naturalmente, dados os movimentos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ das partículas do sistema em um dado intervalo I , o movimento do sistema nesse intervalo, dado por $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$, é um movimento possível do sistema se, e somente se, todos os movimentos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ forem movimentos possíveis das respectivas partículas no intervalo de tempo em consideração.

Até o momento examinamos o conteúdo de uma parte do princípio do determinismo newtoniano, a que afirma que os movimentos possíveis de um sistema isolado são univocamente determinado pelas condições iniciais. Essa afirmação nos leva a perguntar como determinar o movimentos possíveis de um sistema não isolado. A resposta é dada pela outra parte do princípio do determinismo newtoniano, a que afirma que todo sistema que não é isolado é parte de um sistema isolado. Com isso, fica garan-

tido que o movimento de qualquer sistema físico pode ser determinado pelo princípio do determinismo newtoniano pois, se o sistema original não for isolado, podemos incorporar mais partículas a ele, até formar um sistema isolado que o contém. Como os movimentos desse sistema isolado são univocamente determinados pelas condições iniciais, o movimento do sistema original fica determinado por ser uma parte do sistema isolado total. Podemos imaginar a situação extrema, na qual temos um sistema que não é isolado e, além disso, o único sistema isolado que o contém é o universo inteiro, ou uma parte do universo excessivamente grande para, na prática, ser submetida a uma análise baseada no princípio do determinismo. Essa situação extrema é remediada, pelo menos parcialmente, pelo princípio seguinte.

3^o) **Princípio do isolamento:** *O movimento de um sistema não é influenciado por partículas infinitamente distantes dele.*

Na prática, observamos que ao afastarmos uma partícula de um sistema, a influência dela sobre os movimentos do sistema vai diminuindo a partir de certas distâncias, até tornar-se desprezível. Quando a influência torna-se desprezível dizemos que a partícula está a uma distância infinita do sistema. A distância que podemos considerar como infinita é uma grandeza que depende do problema particular em consideração.

Se estamos interessados em estudar os movimentos de certas partículas e elas não formam um sistema fechado, incluímos mais e mais partículas como pertencentes ao sistema. O princípio do isolamento nos garante que formaremos um sistema fechado incluindo apenas partículas que não distam entre si e das partículas originais mais do que uma certa distância. Observemos, também, que do princípio do isolamento obtemos que o movimento das partículas isoladas, mencionadas na definição de referencial inercial e no princípio da inércia, não é influenciado por nenhuma outra partícula do universo.

Passemos agora a algumas conseqüências importantes dos princípios já enunciados.

O princípio do determinismo newtoniano afirma que existe uma função bem determinada para cada sistema isolado, que associa a cada condição inicial um único movimento do sistema. Dado que fica determinado o movimento de cada partícula, fica determinada a sua aceleração em um instante qualquer e , em especial, no instante inicial. Desse modo, uma conseqüência especial do princípio do determinismo newtoniano é que a aceleração de cada partícula do sistema no instante inicial é univocamente determinada pelas posições e velocidades iniciais das partículas do sistema nesse instante. Uma vez que o instante inicial é arbitrário, temos que, em cada instante t , a aceleração de cada partícula de um sistema isolado é univocamente determinada pelas posições e velocidades das partículas do sistema nesse instante.

Consideremos que o sistema isolado tem N partículas e denotemos por \mathbf{r}_k , $\dot{\mathbf{r}}_k$ e $\ddot{\mathbf{r}}_k$, respectivamente, a posição, a velocidade e a aceleração de sua k -ésima partícula em um instante t de um intervalo I ($k = 1, 2, \dots, N$). O princípio do determinismo newtoniano afirma, então, que existe uma única função \mathbf{f}_k que associa às posições e

velocidades das partículas do sistema isolado, em cada instante $t \in I$, a aceleração da k -ésima partícula do sistema nesse mesmo instante ($k = 1, 2, \dots, N$). Temos, portanto,

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (2.50)$$

Note que a aceleração é função também do instante t em que ela é obtida a partir das posições e velocidades. Essa dependência do tempo, que não é excluída pelo princípio do determinismo newtoniano, será eliminada por um outro princípio que estudaremos depois desta seção. Essa dependência ficará subentendida nesta seção, sempre que dissermos que a aceleração depende das posições e velocidades.

Podemos chamar \mathbf{f}_k **função aceleratriz** da k -ésima partícula do sistema. O conjunto das funções aceleratrizes de um sistema isolado é uma característica que define o sistema. As funções aceleratrizes são da forma $\mathbf{f}_k : \mathcal{E}^{3N} \times I \rightarrow \mathcal{E}^3$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Para sermos mais explícitos devemos chamar as funções definidas em (2.50) funções aceleratrizes relativas à origem do referencial em uso. Também podemos expressar o fato de que a aceleração é determinada pelas posições e velocidades escrevendo

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}_k = \bar{\mathbf{f}}_k(\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2, \dots, \bar{\mathbf{r}}_N; \dot{\bar{\mathbf{r}}}_1, \dot{\bar{\mathbf{r}}}_2, \dots, \dot{\bar{\mathbf{r}}}_N; t) \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (2.51)$$

Nessa expressão, posição, velocidade e aceleração são relativas a \mathcal{R}_{ef} e, portanto, elementos de \mathbb{R}^3 , e a função $\bar{\mathbf{f}}_k$ é também chamada **função aceleratriz da k -ésima partícula relativa a \mathcal{R}_{ef}** . Ela é da forma $\bar{\mathbf{f}}_k : \mathbb{R}^{6N} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Naturalmente, dada uma função aceleratriz relativa a \mathcal{R}_{ef} , podemos obter a correspondente relativa à origem de \mathcal{R}_{ef} e vice-versa, por meio do isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$ determinado pela base \mathcal{B} de \mathcal{R}_{ef} .

Continuemos nosso estudo considerando as equações (2.50). Seja $(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N)$ um movimento possível do sistema. A cada instante t estão determinadas as posições das partículas, $\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\phi}_1(t)$, $\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\phi}_2(t), \dots, \mathbf{r}_N = \boldsymbol{\phi}_N(t)$, suas velocidades, $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\boldsymbol{\phi}}_1(t)$, $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\boldsymbol{\phi}}_2(t), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N = \dot{\boldsymbol{\phi}}_N(t)$, e suas acelerações, $\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\boldsymbol{\phi}}_2(t), \dots, \ddot{\mathbf{r}}_N = \ddot{\boldsymbol{\phi}}_N(t)$. Substituindo esses vetores nas N equações (2.50), elas se transformam em identidades, isto é, as funções $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N$ satisfazem às equações (2.50). Isso é óbvio, pois (2.50) foram obtidas como as relações que existem entre acelerações, velocidades e posições de movimentos possíveis do sistema. Portanto, as relações (2.50) são condições necessárias sobre as posições, velocidades e acelerações de um movimento para que seja um movimento possível do um sistema. Agora, passemos à questão da suficiência dessas relações.

Do ponto de vista matemático, as relações (2.50) formam um sistema de N equações vetoriais diferenciais, ordinárias, normais e de segunda ordem, com N incógnitas vetoriais. As incógnitas são as funções $\boldsymbol{\phi}_k : t \in I \mapsto \mathbf{r}_k \in \mathcal{E}^3$ ($k = 1, \dots, N$), que devem satisfazer tal sistema de equações. Decompondo as equações e seus vetores, temos $3N$ equações diferenciais ordinárias, normais e de segunda ordem, com $3N$ incógnitas $\phi_{kx} : t \in I \mapsto x_k \in \mathbb{R}$, $\phi_{ky} : t \in I \mapsto y_k \in \mathbb{R}$ e $\phi_{kz} : t \in I \mapsto z_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, N$). Dadas algumas condições de continuidade sobre as funções aceleratrizes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_N$ que, naturalmente, supomos satisfeitas, a teoria matemática das equações diferenciais garante que há uma, e somente uma, solução das equações diferenciais (2.50), que satisfaz a uma dada condição inicial. Seja a solução das equações diferenciais com

uma dada condição inicial. O movimento possível com essa condição inicial satisfaz às equações diferenciais; logo, ele é a solução das equações diferenciais. Portanto, ser solução das equações é condição suficiente para ser movimento possível. Em suma, satisfazer às equações diferenciais (2.50) é condição necessária e suficiente para ser um movimento possível do sistema de partículas. Com isso, a tarefa de encontrar os movimentos possíveis do sistema se resume a encontrar as soluções das equações diferenciais (2.50).

Podemos entender, intuitivamente, como (2.50) determina uma única solução a partir de uma dada condição inicial. Consideremos como dada uma condição inicial para o sistema em um instante t_0 , as posições das partículas, denotadas por $\mathbf{r}_1^{(0)}, \mathbf{r}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{r}_N^{(0)}$, e as velocidades, denotadas por $\mathbf{v}_1^{(0)}, \mathbf{v}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(0)}$. Supondo que o movimento do sistema se processa de maneira contínua, podemos dizer que, em um intervalo de tempo δt infinitesimal, a variação da posição de cada partícula é uma quantidade de primeira ordem no infinitesimal δt ; especificamente, a variação de posição $\delta \mathbf{r}_k$ da k -ésima partícula é dada por $\delta \mathbf{r}_k = \mathbf{v}_k^{(0)} \delta t$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Denotando por $\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{r}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{r}_N^{(1)}$ as posições das partículas após esse primeiro intervalo de tempo δt , isto é, no instante $t_1 = t_0 + \delta t$, temos:

$$\mathbf{r}_1^{(1)} = \mathbf{r}_1^{(0)} + \mathbf{v}_1^{(0)} \delta t, \quad \mathbf{r}_2^{(1)} = \mathbf{r}_2^{(0)} + \mathbf{v}_2^{(0)} \delta t, \quad \dots, \quad \mathbf{r}_N^{(1)} = \mathbf{r}_N^{(0)} + \mathbf{v}_N^{(0)} \delta t. \quad (2.52)$$

Também as variações de velocidade no intervalo δt podem ser escritas em primeira ordem no infinitesimal δt , mas para isso precisamos saber as acelerações das partículas no instante t_0 . Esse é o ponto crucial, as equações (2.50) permitem determinar tais acelerações a partir das posições e velocidades no instante t_0 . Denotando essas acelerações por $\mathbf{a}_1^{(0)}, \mathbf{a}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{a}_N^{(0)}$, obtemos de (2.50)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^{(0)} &= \mathbf{f}_1 \left(\mathbf{r}_1^{(0)}, \mathbf{r}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{r}_N^{(0)}; \mathbf{v}_1^{(0)}, \mathbf{v}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(0)}; t_0 \right), \\ \mathbf{a}_2^{(0)} &= \mathbf{f}_2 \left(\mathbf{r}_1^{(0)}, \mathbf{r}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{r}_N^{(0)}; \mathbf{v}_1^{(0)}, \mathbf{v}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(0)}; t_0 \right), \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_N^{(0)} &= \mathbf{f}_N \left(\mathbf{r}_1^{(0)}, \mathbf{r}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{r}_N^{(0)}; \mathbf{v}_1^{(0)}, \mathbf{v}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(0)}; t_0 \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

De posse dessas acelerações no instante t_0 , podemos obter a variação de velocidade $\delta \mathbf{v}_k$ da k -ésima no intervalo δt após o instante t_0 , qual seja, $\delta \mathbf{v}_k = \mathbf{a}_k^{(0)} \delta t$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Temos, então, que as velocidades das partículas no instante $t_1 = t_0 + \delta t$, são dadas por

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{v}_1^{(0)} + \mathbf{a}_1^{(0)} \delta t, \quad \mathbf{v}_2^{(1)} = \mathbf{v}_2^{(0)} + \mathbf{a}_2^{(0)} \delta t, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_N^{(1)} = \mathbf{v}_N^{(0)} + \mathbf{a}_N^{(0)} \delta t. \quad (2.54)$$

Agora, observamos que em (2.52) e (2.54) temos as posições e velocidades de todas as partículas do sistema em um dado instante $t_1 = t_0 + \delta t$. O método usado para obter as posições e velocidades no instante $t_1 = t_0 + \delta t$, a partir das posições e velocidades a partir do instante t_0 , pode ser repetido para obter as posições e velocidades no instante $t_2 = t_1 + \delta t$, a partir das posições e velocidades no instante t_1 , e assim por diante, sucessivamente, para os instantes $t_3 = t_2 + \delta t$, $t_4 = t_3 + \delta t$, etc. Desse modo, podemos

obter posições e velocidades em qualquer instante usando, naturalmente, um processo de limite, pois o intervalo de tempo δt é infinitesimal. Em suma, podemos determinar, a cada instante, a configuração do sistema, *i.e.*, podemos determinar o seu movimento. Deve ficar claro que esse movimento pode ser univocamente determinado graças às relações (2.50) e que ele é, por construção, o movimento que satisfaz à condição inicial que foi dada.

Resumindo, as equações diferenciais (2.50) tem por soluções os movimentos possíveis do sistema isolado. Qualquer que seja a condição inicial prescrita, há uma, e somente uma, solução que a satisfaz. Se as funções $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N$ são uma solução das equações (2.50), $(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N)$ é um movimento possível do sistema de partículas; é seu movimento real no qual, no instante t_0 , o sistema tem configuração $(\boldsymbol{\phi}_1(t_0), \boldsymbol{\phi}_2(t_0), \dots, \boldsymbol{\phi}_N(t_0))$ e distribuição de velocidades $(\dot{\boldsymbol{\phi}}_1(t_0), \dot{\boldsymbol{\phi}}_2(t_0), \dots, \dot{\boldsymbol{\phi}}_N(t_0))$. Determinar os movimentos possíveis de um sistema isolado de partículas constitui-se no objetivo primordial da Mecânica Clássica. Grande parte dessa ciência consiste em desenvolver métodos de obter soluções das equações diferenciais (2.50).

Agora vamos usar os princípios anteriores para investigar as funções aceleratrizes obtidas do princípio do determinismo newtoniano. Primeiramente, consideremos a possibilidade de todas as partículas do sistema, com exceção da j -ésima, afastarem-se infinitamente da i -ésima. Nesse caso, o sistema reduz-se a um sistema isolado constituído pelas duas partículas, a partícula i e a partícula j . Um tal sistema será chamado **par isolado de partículas**. Nesse limite, em que todas as outras partículas afastam-se infinitamente das partículas i e j , dos princípios do isolamento e do determinismo newtoniano decorre que a função aceleratriz \mathbf{f}_i em (2.50) tende para uma função \mathbf{f}_{ij} que depende somente da i -ésima e da j -ésima partícula, *i.e.*,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| \rightarrow \infty \quad (k = 1, 2, \dots, N; \quad k \neq i, \quad k \neq j) \implies \\ \implies \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \rightarrow \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j; t). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Naturalmente, também a função aceleratriz \mathbf{f}_j tende para uma função \mathbf{f}_{ji} que depende somente da i -ésima e da j -ésima partícula. Nessa situação, a equação diferencial (2.50) para $k = i$ toma a forma

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j; t) \quad (2.56)$$

e, para $k = j$, a forma $\ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{f}_{ji}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j; t)$.

Agora, supondo que também a j -ésima partícula se afasta infinitamente da i -ésima, que fica assim isolada, obtemos que o membro esquerdo da equação (2.56) tende a zero, em virtude do princípio da inércia. Conseqüentemente, o membro direito também tende a zero, e deduzimos a propriedade

$$|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j| \rightarrow \infty \implies \mathbf{f}_{kj}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j; \dot{\mathbf{r}}_k, \dot{\mathbf{r}}_j; t) \rightarrow 0 \quad (2.57)$$

Obviamente, se afastássemos de uma vez todas as partículas da partícula i , obteríamos o seguinte resultado, válido para a função aceleratriz de um sistema isolado de N partículas,

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| \rightarrow \infty \quad (k = 1, 2, \dots, N; \quad k \neq i) \implies \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \rightarrow 0. \quad (2.58)$$

4^o Princípio da superposição : *A aceleração de uma partícula sob a influência de diversas outras, em um certo instante, é a soma vetorial das acelerações que a partícula teria, no instante considerado, se cada uma das outras estivesse sozinha influenciando-a.*

Esse princípio afirma, portanto, que a função aceleratriz (2.50) goza da seguinte propriedade:

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j; t) \quad (2.59)$$

onde as funções aceleratrizes \mathbf{f}_{ij} ($j = 1, 2, \dots$) são as definidas pelo limite em (2.55). A equação (2.59) pode ser escrita de forma mais sucinta se mantivermos em mente quais são os argumentos das diversas funções envolvidas na equação:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathbf{f}_{ij} . \quad (2.60)$$

Esse princípio faz uma enorme restrição às possíveis formas que uma função aceleratriz \mathbf{f}_i pode assumir.

5^o Princípio da proporcionalidade das acelerações: *As acelerações simultâneas, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ e $\ddot{\mathbf{r}}_j$, das partículas i e j de um par isolado, têm sempre a mesma direção e sentidos opostos e a razão entre seus módulos é uma constante, isto é,*

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -m_{ji}\ddot{\mathbf{r}}_j, \quad (2.61)$$

onde m_{ji} é uma constante positiva que depende apenas das partículas i e j ; além disso, para quaisquer partículas i , j e k , a constante m_{ik} , associada ao par isolado das partículas i e k , a constante m_{jk} , ao par isolado de j e k , e m_{ij} , ao par isolado de i e j , satisfazem à relação

$$\frac{m_{ik}}{m_{jk}} = m_{ij} . \quad (2.62)$$

Desse modo, afastando-se um par qualquer de partículas, digamos partículas i e j , de todas as demais partículas do universo, e medindo as acelerações simultâneas dessas partículas isoladas, podemos verificar a propriedade (2.61) e obter o número positivo m_{ij} associado a esse par de partículas. Dados os números associados a diversos pares, podemos verificar que eles obedecem à relação (2.62).

Da definição do número m_{ij} associado a um par de partículas i e j obtemos, imediatamente,

$$m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}} \quad (2.63)$$

Esses são os princípios mais fundamentais da Mecânica Clássica. Os princípios da inércia, do isolamento e do determinismo newtoniano nos levam às equações (2.50). Estas são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, determinadas pelas funções aceleradoras $\mathbf{f}_k (k = 1, 2, \dots)$. Dada a condição inicial do sistema isolado, essas equações determinam univocamente as funções de movimento $\boldsymbol{\phi}_k (k = 1, 2, \dots)$, que satisfazem a condição inicial. O problema de determinar o movimento de um sistema isolado, quando são dadas a sua condição inicial e as funções aceleratrizes de suas partículas, é chamado **problema fundamental da Mecânica Clássica**. O problema de determinar as funções aceleratrizes, a partir de informações sobre os movimentos possíveis do sistema, é chamado **problema inverso da Mecânica Clássica**. Tanto na solução do problema fundamental, quanto na do inverso, os demais princípios, da superposição e da proporcionalidade das acelerações, podem ser úteis e mesmo necessários. Em nosso estudo usaremos algumas combinações desses princípios, conhecidas como as Três Leis de Newton do movimento.

2.4 Definições de massa e força e as três leis de Newton do movimento.

O princípio de proporcionalidade das acelerações associa a cada par de partículas uma constante real positiva bem determinada e as diversas constantes estão relacionadas por duas propriedades fundamentais. Especificamente, ao par de partículas i e j corresponde a constante m_{ji} , dada em (2.61), e as constantes associadas a todos os pares obedecem às relações (2.62) e (2.63). Agora, veremos que, usando essas constantes e suas propriedades, podemos associar a cada partícula uma grandeza real positiva, que será chamada massa.

Primeiramente, escolhemos uma partícula bem determinada que será chamada **partícula padrão**, ou partícula p . Qualquer outra partícula i pode formar um par isolado com a partícula padrão, ao qual fica associado o número m_{ip} . Esse número é a medida de uma grandeza que chamaremos **massa** da partícula i e representaremos por m_i , sendo a medida m_{ip} obtida na unidade determinada pela partícula padrão p , unidade essa que representaremos por u_p . Desse modo, temos que a massa da partícula i , expressa na unidade de massa associada à partícula p , é

$$m_i := m_{ip} u_p . \quad (2.64)$$

Evidentemente, como não é possível formar um par ordenado da partícula padrão como ela mesma, não podemos usar o princípio de proporcionalidade das acelerações para atribuir uma massa à própria partícula padrão. Essa massa é atribuída a ela por convenção e, de acordo com o costume, dizemos que a partícula padrão tem uma unidade de massa,

$$m_p := 1 u_p . \quad (2.65)$$

Com isso nos situamos na terminologia própria das grandezas físicas e suas unidades, na qual a unidade de uma grandeza é a grandeza do padrão que define a unidade. Com isso, (2.64) pode ser escrita na forma

$$m_i := m_{ip} m_p , \quad (2.66)$$

ou seja, a medida m_{ip} da massa de uma partícula i , usando uma partícula p como padrão, é a razão entre a massa da partícula i e a massa da partícula padrão. Se escolhêssemos uma outra partícula padrão, digamos p' teríamos uma outra unidade de massa $u_{p'}$ e cada partícula i teria uma outra medida $m_{ip'}$ nessa unidade. Entretanto, a própria grandeza não deve mudar ao se mudar de unidade, ou seja, a massa m_i de qualquer partícula, inclusive a que tomamos como padrão, não deve mudar ao mudarmos de unidade. Isso será verdade se e somente se $m_{ip'} m_{p'} = m_{ip} m_p$, o que pode ser verificado usando-se as propriedades (2.62) e (2.63). Desse modo, o princípio da proporcionalidade das acelerações garante a definição apropriada de massa, como uma grandeza independente da unidade usada na sua medição.

Vemos que, em um dado referencial inercial, o princípio da proporcionalidade das acelerações permite associar a cada partícula uma massa, grandeza positiva e constante, cuja medida é bem determinada pela fixação de uma partícula padrão para a unidade de massa. No SI a partícula padrão, comumente chamada **massa padrão**, é o **quilograma**, um cilindro de platina iridiada conservado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas. A unidade associada a esse padrão também é chamada quilograma, simbolizado por kg.

Usando a definição (2.66) de massa, obtemos da propriedade (2.62),

$$m_{ij} = \frac{m_j}{m_i} \quad (2.67)$$

Em contrapartida, dessa igualdade podemos derivar as propriedades (2.62) e (2.63), ou seja, graças ao conceito de massa, temos uma igualdade (2.67) equivalente às duas propriedades (2.62) e (2.63).

Usando a expressão (2.67) escrevemos (2.61) na forma

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -m_j \ddot{\mathbf{r}}_j . \quad (2.68)$$

Nessa expressão, podemos ver, claramente, um significado físico da grandeza massa de uma partícula. Em um par isolado de partículas, acelera-se menos a partícula de maior massa, e acelera-se tanto menos quanto maior for a sua massa. Desse modo, a massa de uma partícula é uma propriedade que mede a resistência que ela oferece a ser acelerada na presença de uma outra partícula. Veremos que essa propriedade, de uma partícula oferecer resistência a ser acelerada, também se manifesta em qualquer outra vizinhança, e não apenas na vizinhança constituída por uma única outra partícula de um par isolado.

Usando em (2.68) as expressão (2.56), que dá a aceleração de uma partícula de um par isolado, obtemos

$$m_i \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j; t) = -m_j \mathbf{f}_{ji}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j; t) . \quad (2.69)$$

Essa equação nos proporciona uma forma notavelmente simples para o princípio da proporcionalidade das acelerações: em um par isolado de partículas, a cada instante, o produto da massa de uma partícula pelo valor de sua função aceleratriz é um vetor com o mesmo módulo, a mesma direção e o sentido contrário do mesmo produto para a outra partícula. Com isso, (2.68) também nos mostra a conveniência de definir

um novo conceito, dado pelo produto da massa de uma partícula pela sua função aceleratriz.

Definimos **função-força** associada à função aceleratriz de uma partícula como o produto da massa da partícula por sua função aceleratriz. Uma vez que os valores de uma função aceleratriz são vetores, os valores da função-força correspondente também serão vetores, que chamamos **forças**. Tal como a função aceleratriz, a função-força é uma função vetorial. O produto da massa m_i da partícula i do sistema isolado por sua função aceleratriz \mathbf{f}_i , é chamada **função-força total da partícula i** . Assim, representando-a por \mathcal{F}_i , temos $\mathcal{F}_i = m_i \mathbf{f}_i$, ou seja

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) = m_i \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t). \quad (2.70)$$

O valor dessa função-força é representado por \mathbf{F}_i e chamado **força total** sobre a partícula i , ou **força sobre a partícula i exercida pelas demais partículas do sistema**. Desse modo, a força total sobre a partícula i é dada por

$$\mathbf{F}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t). \quad (2.71)$$

Podemos ser mais específicos e dizer que essa é a força total sobre a partícula i , no instante t , quando o sistema está na configuração $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ com distribuição de velocidades $(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$.

O conceito de força permite escrever a equação (2.50), decorrente do princípio do determinismo newtoniano, na forma

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t), \quad (2.72)$$

ou seja,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i. \quad (2.73)$$

O conteúdo de (2.72) é o mesmo de (2.50), qual seja, ela é a lei dinâmica que afirma que, a cada instante, a aceleração da i -ésima partícula do sistema isolado é univocamente determinada pelas posições e velocidades das partículas do sistema nesse instante. Na forma (2.73) essa lei pode ser enunciada na forma abreviada: o produto da massa pela aceleração de uma partícula é igual à força total sobre ela.

No par isolado de partículas i e j , temos a função força \mathcal{F}_{ij} associada à função aceleratriz \mathbf{f}_{ij} , $\mathcal{F} = m_i \mathbf{f}_{ij}$, e a força correspondente,

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j; t) \quad (2.74)$$

é chamada **força sobre a i -ésima partícula exercida pela j -ésima** no par isolado. De acordo com o princípio da superposição, temos

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathbf{F}_{ij}. \quad (2.75)$$

que é uma maneira equivalente de escrever (2.60). É também conveniente definir **força sobre a partícula i exercida por outras partículas j_1, j_2, \dots, j_n** do

sistema isolado, como sendo a soma $\mathbf{F}_i := \mathbf{F}_{ij_1} + \mathbf{F}_{ij_2} + \dots + \mathbf{F}_{ij_n}$. Notemos que, graças ao princípio da superposição, é apropriado nos referirmos a \mathbf{F}_{ij} como a **força sobre a i -ésima partícula exercida pela j -ésima**, sem nos preocuparmos com a questão dessas partículas estarem ou não na situação de um par isolado. Note que a força total \mathbf{F}_i é também chamada **força resultante** sobre a i -ésima partícula, para expressar que ela é a soma vetorial das forças exercidas pelas demais partículas do sistema isolado, conforme expresso na equação (2.75).

Quanto ao princípio da proporcionalidade das acelerações, em termos do conceito de força, podemos escrever (2.68) na forma da seguinte relação entre as forças entre duas partículas

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \quad (2.76)$$

isto é, a força sobre uma partícula i , exercida por uma partícula j , tem mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto à força sobre a partícula j , exercida pela partícula i .

A equação (2.72), ou sua forma abreviada (2.73), é conhecida como Segunda Lei de Newton. A equação (2.76) é conhecida como Terceira Lei de Newton. As forças \mathbf{F}_{ij} e \mathbf{F}_{ji} nela envolvidas são chamadas **forças de interação entre as i -ésima e j -ésima partícula**, ou forças de **ação** e **reação** entre elas.

Observemos na definição (2.70) que, matematicamente a função-força \mathcal{F}_i pouco difere da função aceleradora \mathbf{f}_i . No entanto, o conceito de força é extremamente útil, não sómente porque permite escrever os princípios da dinâmica de forma simples, como acabamos de ver, como também porque é dotado de um significado intuitivo que facilita nossa análise do movimento dos sistema em estudo, como veremos.

A existência da função aceleratriz e, portanto, da função força, que determinam, a cada instante, a aceleração da partícula em função da configuração e distribuição de velocidades do sistema isolado, é uma lei física, derivada do princípio do determinismo newtoniano. Essa lei física está contida na Segunda Lei de Newton. Nessa lei física também estão contidas as definições de massa e força, de acordo com a teoria anteriormente desenvolvida. O valor da força total sobre a partícula é, de fato, definido como o produto de sua massa pela sua aceleração, como aparece na equação (2.73) da Segunda Lei de Newton. No entanto, essa lei não se resume a essa definição, seria um absurdo atribuir a uma definição a virtude de uma lei, mas à afirmação obtida experimentalmente, de que o produto da massa pela aceleração, o valor da força, é uma função das posições e velocidades das partículas do sistema fechado. Na verdade, o dado experimental revelado pela Natureza, é a existência da função aceleratriz ou, equivalentemente, da função-força; o valor dessa função, que chamamos força, é apenas uma quantidade que é conveniente introduzir na teoria.

Note que é comum usar o mesmo nome e o mesmo símbolo para a função e o seu valor. Esse procedimento aplicado à função-força nos leva a denominá-la, simplesmente, força, que é o nome dado ao seu valor. Também nos leva a representá-la pelo mesmo símbolo usado para o seu valor, de modo a escrevermos, por exemplo, para a força total,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t). \quad (2.77)$$

Essa notação é conveniente e não causa confusão se mantivermos em mente a distinção óbvia e importante entre uma função e seu valor.

Já vimos em (2.68) que a massa é uma medida da resistência que uma partícula de um par isolado oferece a ser acelerada pela outra. Na Segunda Lei de Newton (2.72), essa resistência à aceleração aparece em seu contexto mais geral. Com efeito, é evidente em (2.72) que, dadas em um certo instante a configuração e distribuição de velocidades de um sistema isolado, a aceleração de uma dada partícula do sistema será tanto menor quanto maior for a sua massa. Isso significa que a vizinhança de uma partícula terá tanto mais dificuldade em acelerá-la, quanto maior for a sua massa. Podemos também expressar essa propriedade dizendo que, para uma dada força sobre a partícula, sua aceleração será tanto menor quanto maior for sua massa. Essa resistência que uma partícula oferece a ser acelerada, *i.e.*, sua tendência para manter a mesma velocidade, é chamada **inércia** da partícula. Dizemos, então, que a massa de uma partícula é uma medida de sua inércia. Quando uma partícula não tem vizinhança, isto é, está isolada, a força total sobre ela é nula e, conseqüentemente, é nula a sua aceleração, de acordo com a Segunda Lei de Newton. Isso mostra que a Segunda Lei de Newton é consistente com o chamado princípio da inércia, que deve seu nome exatamente a essa propriedade que estamos discutindo. Note que o princípio da inércia é necessário para começarmos a formular as leis da dinâmica e foi usado para concluirmos em (2.57) que a função aceleratriz de uma partícula isolada e, portanto, a força sobre ela, é nula. Por isso, ele é necessário dentre os princípios fundamentais da Mecânica e não pode ser descartado sob o argumento errôneo de que é um simples caso particular da Segunda Lei de Newton. Nada impede, é claro, que ele desempenhe esse papel de caso particular de outros princípios em formulações da Mecânica Clássica diferentes da que estamos considerando.

Da segunda Lei de Newton também obtemos o significado físico intuitivo da palavra força. De fato, dada uma partícula e sua massa, ela será tanto mais acelerada pela sua vizinhança quanto maior for a força que essa exerce sobre a partícula. Desse modo, podemos dizer que força é a ação aceleradora de uma vizinhança sobre uma partícula.

A Segunda Lei de Newton (2.72) é uma outra forma de escrever a equação diferencial (2.50). A partir da Segunda Lei de Newton podemos enunciar o problema fundamental da mecânica da seguinte maneira: dadas as forças sobre as partículas de um sistema e suas condições iniciais, determinar o seu movimento. Em contrapartida, o problema inverso assim se enuncia: determinar as forças que agem sobre as partículas de um sistema a partir de informações sobre os movimentos que ele efetua. A Segunda Lei de Newton também é chamada **equação de movimento**, pois as suas soluções são os movimentos possíveis do sistema em estudo.

Newton formulava a sua segunda lei em termos do produto da massa de uma partícula por sua velocidade, produto este que ele chamava **quantidade de movimento** ou, simplesmente, **movimento** (sic). A quantidade de movimento de uma partícula é chamada atualmente **momento linear** da partícula, ou **momento** da partícula. O momento linear da partícula i é, pois,

$$\mathbf{P}_i := m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (2.78)$$

Em termos de momento linear, a Segunda Lei de Newton (2.73) toma a forma:

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = \mathbf{F}_i, \quad (2.79)$$

i.e., a taxa instantânea de mudança da quantidade de movimento de uma partícula é igual à força total sobre ela.

O conteúdo dos princípios da dinâmica, enunciados na seção anterior, foram expressos por Newton na forma das três leis que levam o seu nome e que ele enunciou da seguinte forma, em sua obra máxima *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

LEX I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

LEX II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

LEX III. Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrariam dirigi.

Essas três leis podem ser traduzidas para o português na forma que segue ¹.

Lei I. Todo corpo permanece em estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que seja obrigado a mudar seu estado por forças impressas nele.

Lei II. A mudança do movimento é proporcional à força motriz impressa e se faz segundo a linha reta pela qual se imprime essa força.

Lei III. A uma ação sempre se opõe uma reação igual, ou seja, as ações de dois corpos um sobre o outro sempre são iguais e se dirigem a partes contrárias.

Devido ao seu poder explicativo, à sua profundidade e abrangência, à variedade de suas aplicações e ao impacto exercido nas ciências e na cultura, essas três leis e a obra no qual aparecem podem ser consideradas umas das maiores glórias do pensamento humano. É apropriado encerrar uma exposição sobre as leis de Newton com os versos de Alexandre Pope:

*Nature and Nature's Laws lay hid in night.
Good said, Let Newton be, and all was light.* ²

¹Tradução de Carlos Lopes de Mattos em: Os Pensadores, vol. XIX, Abril Cultural, São Paulo, 1974.

²Em tradução livre: A natureza e suas leis jaziam ocultas na noite. Deus disse: faça-se Newton, e tudo se fez luz.

2.5 Espaço-tempo newtoniano e princípio da relatividade galileana.

Os princípios da dinâmica clássica são válidos para um observador em um referencial inercial. Dois observadores em diferentes referenciais inerciais podem ver diferentes movimentos de um mesmo sistema isolado. Nesta seção, estudamos como as grandezas e as equações que regem os movimentos observados de um referencial inercial se relacionam com as grandezas e leis que regem os observados de outro referencial inercial. Nesse estudo é importante usarmos conceitos relativos a referenciais.

Os conceitos fundamentais envolvidos no estudo do movimento são o espaço e o tempo. O espaço é descrito por meio das coordenadas dos seus pontos, e o conceito de coordenada está baseado na grandeza mensurável distância entre pontos, tal como indicada pelas réguas. Também o conceito de tempo está baseado na grandeza mensurável intervalo de tempo entre eventos, tal como indicado pelos relógios. Portanto, para estudar o movimento em diferentes referenciais necessitamos de um postulado que relacione os conceitos de espaço e de tempo nesses referenciais, ou seja, necessitamos de um postulado que relacione em diferentes referenciais os conceitos de distância entre pontos e intervalo entre eventos. Em Mecânica Clássica adotamos a visão newtoniana do espaço e do tempo absolutos, que é dada no princípio enunciado a seguir.

6^o Princípio newtoniano do espaço e tempo absolutos. *O intervalo de tempo entre dois eventos é o mesmo em relação a qualquer referencial inercial e também o é a distância entre dois eventos simultâneos.*

Seja $\mathcal{R}ef$ um referencial qualquer com seu sistema de eixos coordenados. Vamos chamar o tempo relativo a $\mathcal{R}ef$ **coordenada temporal relativa a $\mathcal{R}ef$** e as coordenadas ao longo dos eixos cartesianos de $\mathcal{R}ef$, **coordenadas espaciais relativas a $\mathcal{R}ef$** . Se em um referencial um evento ocorre no instante t e na posição de coordenadas x_1 , x_2 e x_3 , dizemos que as coordenadas espaço-temporais do evento relativas a $\mathcal{R}ef$ são x_1 , x_2 e x_3 e t . Tais coordenadas formam o vetor (x_1, x_2, x_3, t) de R^4 , que denominamos **quadrivetor de coordenadas do evento relativo a $\mathcal{R}ef$** . Naturalmente, $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$ é o vetor-posição relativo a $\mathcal{R}ef$ do ponto no qual ocorre o evento e escrevemos para o quadrivetor de coordenadas do evento $(x_1, x_2, x_3, t) = (\bar{r}, t)$; dizemos que esse evento ocorre na posição \bar{r} , no instante t .

Seja um evento que, em relação a um referencial $\mathcal{R}ef$ ocorre no instante t_1 , na posição \bar{r}_1 e, em relação a um referencial $\mathcal{R}ef'$, no instante t'_1 , na posição \bar{r}'_1 ; seja um segundo evento que, em relação $\mathcal{R}ef$ ocorre no instante t_2 , na posição \bar{r}_2 e, em relação a $\mathcal{R}ef'$, no instante t'_2 , na posição \bar{r}'_2 . De acordo com o princípio newtoniano do espaço e tempo absolutos, devemos ter

$$|t'_1 - t'_2| = |t_1 - t_2| \quad \text{e} \quad (2.80)$$

$$|\bar{r}'_1 - \bar{r}'_2| = |\bar{r}_1 - \bar{r}_2| \quad \text{se} \quad t_1 = t_2. \quad (2.81)$$

Essas condições restringem as possíveis mudanças de coordenadas quando passamos de um referencial inercial para outro. A definição de referencial inercial e o princípio

da inércia também impõem uma restrição a essas mudanças de coordenadas. Se um referencial é inercial, dele qualquer partícula livre é observada em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Em qualquer outro referencial inercial as mesmas partículas livres devem ser observadas em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Conseqüentemente, as transformações de coordenadas entre referenciais inerciais devem converter funções-movimento que descrevem repouso ou movimento retilíneo uniforme em funções-movimento que descrevem repouso ou movimento retilíneo uniforme.

A função-movimento que descreve repouso ou movimento retilíneo uniforme de uma partícula em relação a um referencial $\mathcal{R}ef$ é $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}t$ onde \bar{r} é a posição da partícula relativa a $\mathcal{R}ef$, t o tempo relativo a $\mathcal{R}ef$, \bar{r}_0 a posição inicial da partícula no instante inicial $t = 0$ e \bar{v} a velocidade constante da partícula relativa a $\mathcal{R}ef$ ($\bar{v} = \bar{0}$ no caso de repouso). Analogamente, a função-movimento que descreve repouso ou movimento retilíneo uniforme de uma partícula em relação a um referencial $\mathcal{R}ef'$ é $\bar{r}' = \bar{r}'_0 + \bar{v}'t'$. De acordo com a definição de referencial inercial e o princípio da inércia, se $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$ são referenciais inerciais, a transformação das coordenadas de $\mathcal{R}ef$ para as coordenadas de $\mathcal{R}ef'$, deve transformar a função-movimento $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}t$ em uma função-movimento da forma $\bar{r}' = \bar{r}'_0 + \bar{v}'t'$. Notemos que o movimento retilíneo relativo a $\mathcal{R}ef$ pode ter qualquer posição inicial e qualquer velocidade constante, de modo que \bar{r}_0 e \bar{v} são vetores arbitrários de \mathbb{R}^3 . Assim, a mudança das coordenadas (\bar{r}, t) de um referencial inercial $\mathcal{R}ef$ para as coordenadas (\bar{r}', t') de um referencial inercial $\mathcal{R}ef'$, deve satisfazer à condição

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}t \implies \bar{r}' = \bar{r}'_0 + \bar{v}'t' \quad (\forall \bar{r}_0, \bar{v} \in \mathbb{R}^3) \quad (2.82)$$

Por hipótese, os relógios em um referencial podem estar em qualquer lugar e estão todos sincronizados. Conseqüentemente, acusam em qualquer lugar um mesmo instante para um dado evento. A transformação entre o instante t acusado no referencial inercial $\mathcal{R}ef$ e o instante t' acusado no referencial inercial $\mathcal{R}ef'$ é dada por uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Os referenciais $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$ podem estar em movimento um relativamente ao outro, de modo que a mudança de coordenadas ao passarmos de um para o outro pode depender do instante em que elas são consideradas. A transformação entre o vetor-posição relativo a $\mathcal{R}ef$ e o vetor-posição relativo a $\mathcal{R}ef'$ é dada por uma função que depende do instante do tempo em que consideramos a relação entre os dois vetores-posição, digamos o instante t relativo a $\mathcal{R}ef$ (ou o instante t' relativo a $\mathcal{R}ef'$); seja $\psi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($t \in \mathbb{R}$) essa função. Portanto, as transformações de coordenadas espaço-temporais são

$$t' = \phi(t) \quad \text{e} \quad \bar{r}' = \psi_t(\bar{r}) . \quad (2.83)$$

Usando essas funções nas condições (2.80), (2.81) temos que

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = |t_1 - t_2| \quad \text{e} \quad (2.84)$$

$$|\psi_{t_1}(\bar{r}_1) - \psi_{t_2}(\bar{r}_2)| = |\bar{r}_1 - \bar{r}_2| \quad \text{se} \quad t_1 = t_2 . \quad (2.85)$$

Essas condições, juntamente com a condição (2.82), determinam as relações possíveis entre as coordenadas de um mesmo evento em dois referenciais inerciais distintos.

Definindo a função g por meio de $g(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$, obtemos $\varphi(t) = g(t) + \beta$ ($\beta = \varphi(0)$), $g(0) = 0$ e a condição $|g(t_1) - g(t_2)| = |t_1 - t_2|$, imposta por (2.84).

Fazendo $t_2 = 0$ e denotando t_1 por t , obtemos $|g(t)| = |t|$, que tem por solução $g(t) = \pm t$. Portanto,

$$\phi(t) = \varepsilon t + \beta \quad (\varepsilon = \pm 1, \beta \in \mathbb{R}). \quad (2.86)$$

Essa é a condição necessária e suficiente para que ϕ satisfaça à condição (2.84).

Como vimos no capítulo 1, a condição (2.85) sobre a função ψ_t em (2.83) nos leva a $\bar{r}' = \psi_t(\bar{r}) = G(t)\bar{r} + \bar{b}(t)$, onde $G(t)$ é um operador ortogonal dependente do tempo e $\bar{b}(t)$, um vetor de \mathbb{R}^3 dependente do tempo. Para satisfazer também à condição (2.82), devemos ter, necessariamente, que $G(t)$ não depende do tempo e que $\bar{b}(t)$ é uma função polinômial do primeiro grau em t (com coeficientes em \mathbb{R}^3). Passamos, então, a denotar $G(t)$ por G e escrevemos $\bar{b}(t) = \bar{u}t + \bar{b}$, onde \bar{u} e \bar{b} são dois vetores constantes quaisquer de \mathbb{R}^3 . Portanto,

$$\psi_t(\bar{r}) = G\bar{r} + \bar{u}t + \bar{b} \quad (G \text{ é ortogonal e } \bar{u}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3). \quad (2.87)$$

Essa é a condição necessária e suficiente para que ψ_t satisfaça às condições (2.85) e (2.82).

De acordo com (2.86) e (2.87), as transformações de coordenadas possíveis de um referencial inercial $\mathcal{R}ef$ para um referencial inercial $\mathcal{R}ef'$ são dadas por

$$\bar{r}' = G\bar{r} + \bar{u}t + \bar{b} \quad \text{e} \quad t' = \varepsilon t + \beta, \quad (2.88)$$

onde G é operador linear ortogonal sobre \mathbb{R}^3 , $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^3$, $\varepsilon = \pm 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Consideremos a transformação na coordenada temporal em (2.88). Sendo β arbitrário, podemos considerar $\beta = 0$ para obter a transformação $t' = \varepsilon t$. Os relógios de $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$ estão sincronizados em $t = 0$. Se $\varepsilon = 1$ eles permanecem sincronizados e marcam o mesmo instante para qualquer evento. Se $\varepsilon = -1$, eles marcham em sentidos opostos, de modo a termos sempre $t' = -t$. Essa transformação é chamada **inversão temporal** e não será considerada no que segue. Portanto, restringimo-nos às transformações do tipo

$$t' = t + \beta. \quad (2.89)$$

Elas são dadas pela situações em que os relógios de $\mathcal{R}ef'$ estão adiantados de β em relação aos relógios de $\mathcal{R}ef$. Essa transformação é chamada **translação temporal**; dizemos que o tempo foi transladado de β .

Agora, Consideremos a transformação nas coordenadas espaciais em (2.88). Sendo \bar{u} e \bar{b} arbitrários podemos tomá-los como nulos. Temos, então, a transformação de coordenada $\bar{r}' = G\bar{r}$, com G ortogonal. É fácil demonstrar que toda transformação ortogonal tem inversa, que também é ortogonal, *i.e.*, existe o operador ortogonal G^{-1} sobre \mathbb{R}^3 tal que $GG^{-1} = G^{-1}G = id_{\mathbb{R}^3}$ e, portanto, $\bar{r} = G^{-1}\bar{r}'$. Sendo ortogonal, G transforma bases ortonormais em bases ortonormais. Chamamos G **rotação** se transforma bases dextrógiras em dextrógiras e, levógiras em levógiras. Chamamos G **inversão espacial** se transforma bases dextrógiras em levógiras e vice-versa. Não consideraremos inversões espaciais no que segue e usaremos R no lugar de G para denotar as transformações ortogonais restantes, *i.e.*, as rotações. Portanto, dentre as

transformações ortogonais de coordenadas possíveis (2.88) entre referenciais inerciais, estaremos doravante restritos às transformações

$$\bar{\mathbf{r}}' = R\bar{\mathbf{r}}, \quad (2.90)$$

nas quais R é uma rotação em \mathbb{R}^3 . Seja $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a base ordenada do referencial $\mathcal{R}ef$ e $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ a base correspondente de \mathbb{R}^3 , *i.e.*, $\bar{\mathbf{e}}_i = \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Seja R_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) a i -ésima componente do vetor $R\bar{\mathbf{e}}_j$ na base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$, $R\bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^3 R_{ij}\bar{\mathbf{e}}_i$; obviamente, R_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são os elementos de matriz do operador R na base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$. Usando esses elementos de matriz, obtemos

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.91)$$

Uma vez que, sob uma rotação R , $R\bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{0}}$, as origens de $\mathcal{R}ef$ e de $\mathcal{R}ef'$ coincidem, de modo que o vetor-posição de qualquer ponto relativo à origem de $\mathcal{R}ef$ é igual ao vetor-posição do mesmo ponto relativo à origem de $\mathcal{R}ef'$. Portanto, usando os vetores da base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ de $\mathcal{R}ef'$, obtemos $\sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$. Agora, usando nessa igualdade as relações (2.91), obtemos $\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 R_{ij} \mathbf{e}'_i$. Existe um único operador linear $\mathcal{R} : \bar{\mathcal{E}}^{\rightarrow} \rightarrow \bar{\mathcal{E}}^{\rightarrow}$, tal que $\mathcal{R}\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^3 R_{ij} \mathbf{e}'_i$. Com essa definição, temos $\mathcal{R}\mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_j$ e obtemos que \mathcal{R} é um operador de rotação sobre $\bar{\mathcal{E}}^{\rightarrow}$. Portanto, temos a seguinte relação entre os vetores da base de $\mathcal{R}ef$ e os da base de $\mathcal{R}ef'$,

$$\mathbf{e}'_i = \mathcal{R}^{-1} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.92)$$

Desse modo, a transformação de coordenadas realizada por R em (2.88) ocorre como conseqüência de submeter os vetores da base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathcal{R}ef$ a uma mesma rotação \mathcal{R}^{-1} , *i.e.*, de transformar $\mathcal{R}ef$ em $\mathcal{R}ef'$ por meio da rotação \mathcal{R}^{-1} . Em alguns casos é simples visualizar a transformação de referencial que dá origem a uma dada transformação de coordenadas. Por exemplo, digamos que a transformação de coordenadas consista em uma rotação de um ângulo θ em torno de $\bar{\mathbf{e}}_3$; temos que $x'_3 = x_3$ e o ponto $(x_1, x_2, 0)$ roda até o ponto $(x'_1, x'_2, 0)$ de um ângulo θ no sentido anti-horário. Nesse caso, o referencial $\mathcal{R}ef'$ é obtido rodando-se os eixos de $\mathcal{R}ef$ de um ângulo $-\theta$ em torno de \mathbf{e}_3 . O fato de que o ângulo de rotação dos eixos do referencial no espaço \mathcal{E} é o negativo do ângulo de rotação no espaço de coordenadas \mathbb{R}^3 ilustra o fato de que em (2.92) aparece o inverso do operador \mathcal{R} . A mudança do referencial $\mathcal{R}ef$ para $\mathcal{R}ef'$, que dá origem à mudança de coordenadas (2.90), é chamada **rotação do referencial $\mathcal{R}ef$** ; a própria mudança de coordenadas também é chamada uma **rotação de coordenadas espaciais**.

Uma das possíveis rotações de coordenadas é a trivial, *i.e.*, dada por $R = id_{\mathbb{R}^3}$ em (2.90) e, portanto, $G = R = id_{\mathbb{R}^3}$ em (2.88). Nesse caso, $\bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{u}}t + \bar{\mathbf{b}}$. Primeiramente, consideremos $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}}$, de modo que a transformação de coordenadas é

$$\bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{b}}. \quad (2.93)$$

Como $\bar{\mathbf{b}}$ é um vetor fixo do espaço \mathbb{R}^3 , todos os seus pontos sofrem o mesmo deslocamento $\bar{\mathbf{b}}$ e a transformação (2.93) é chamada uma **translação das coordenadas**

espaciais. É fácil verificar que essa transformação de coordenadas se origina de uma única mudança de referenciais, que consiste em passar de $\mathcal{R}ef$ para $\mathcal{R}ef'$ deslocando todos os pontos dos eixos de $\mathcal{R}ef$ de um mesmo vetor $-\mathbf{b}$, sendo $\mathbf{b} = \kappa_{\mathcal{B}}(\bar{\mathbf{b}})$. Nesse caso, dizemos que houve uma **translação do referencial $\mathcal{R}ef$** , ou que o referencial $\mathcal{R}ef$ sofreu uma translação $-\mathbf{b}$. Naturalmente, em uma translação a base do referencial não se altera, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. As duas transformações (2.93) e (2.89) definem uma **translação espaço-temporal**.

Agora, consideremos $R = id_{\mathbb{R}^3}$ e $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$, de modo que a transformação de coordenadas é

$$\bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{u}} t . \quad (2.94)$$

A mudança de referencial $\mathcal{R}ef$ para $\mathcal{R}ef'$, que resulta nessa mudança de coordenadas consistem em dotar todos os pontos do referencial $\mathcal{R}ef$ de movimento retilíneo uniforme com a mesma velocidade $-\mathbf{u}$, sendo $\mathbf{u} = \kappa_{\mathcal{B}}(\bar{\mathbf{u}})$. No instante t , a origem de $\mathcal{R}ef$, por exemplo, deslocou-se até o ponto $\bar{\mathbf{r}} = -\bar{\mathbf{u}} t$, onde está a origem do novo referencial $\mathcal{R}ef'$. A transformação do referencial $\mathcal{R}ef$ que consiste em dotá-lo de uma velocidade $-\mathbf{u}$ é chamada **empurrão do referencial $\mathcal{R}ef$** com velocidade $-\mathbf{u}$. Sob empurrões a base do referencial não se altera. A própria transformação de coordenadas (2.94) pode ser chamada um **empurrão das coordenadas espaciais** com velocidade $\bar{\mathbf{u}}$.

Em suma, as transformações de coordenadas possíveis entre dois referenciais inerciais, excluindo as inversões espaciais e temporais, são dadas por

$$\bar{\mathbf{r}}' = R\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{u}} t + \bar{\mathbf{b}} \quad \text{e} \quad t' = t + \beta \quad , \quad (2.95)$$

i.e., uma rotação R , seguida de um empurrão com velocidade $\bar{\mathbf{u}}$, uma translação espacial $\bar{\mathbf{b}}$ e uma translação temporal β . As transformações (2.88), que incluem inversões espaço-temporais, são chamadas **transformações de Galileu** e as transformações (2.95), **transformações de Galileu restritas**. É possível compor transformações de Galileu e o resultado é uma transformação de Galileu e, além disso, cada transformação de Galileu tem uma transformação inversa que também é uma transformação de Galileu. Na verdade, as transformações de Galileu formam um grupo, chamado **grupo de Galileu**. O mesmo se pode dizer das transformações de Galileu restritas, que formam o **grupo de Galileu restrito**.

Agora passaremos ao enunciado de um novo princípio, um princípio de relatividade. Ele deve estabelecer que todos os referenciais inerciais são equivalente, isto é, que não há um referencial privilegiado entre os inerciais. Costuma-se expressar tal fato dizendo-se que em todo referencial inercial observa-se a mesma física. Obviamente, isso não significa que de todo referencial inercial se observa o mesmo movimento de um sistema isolado, pois o movimento do sistema depende do referencial inercial do qual é observado. O modo correto de expressar a equivalência dos referenciais inerciais foi induzido por Galileu de observações e experimentos e claramente formulado em sua obra “Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo”³. Ele pode ser enunciado na forma seguinte.

³Cf. a discussão feita em H. M. Nussenzveig, Curso de Física Básica - 1 Mecânica (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2002).

7^o Princípio da relatividade galileana. *O conjunto de todos os movimentos possíveis de um sistema isolado é o mesmo em todos os referenciais inerciais.*

Sabemos que os movimentos possíveis de um sistema isolado são determinados pela Segunda Lei de Newton. Mais explicitamente, para um sistema isolado de N partículas são os movimentos nos quais as posições, velocidades e acelerações das partículas satisfazem às equações de movimento $m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), dadas em (2.72). Agora estaremos considerando diferentes referenciais inerciais, de modo que se torna necessário escrevermos as equações de movimento em termos de grandezas relativas aos referenciais. A seguir, veremos as condições que o princípio da relatividade galileana impõe às leis da dinâmica.

Seja a função aceleratriz relativa a um referencial $\mathcal{R}ef$ de uma das partículas do sistema isolado. Função-força associada a essa função aceleratriz é o produto da massa da partícula pela função aceleratriz. Dizemos que essa é a **função-força da partícula relativa ao referencial $\mathcal{R}ef$** , e seu valor é a força sobre a partícula relativa a $\mathcal{R}ef$, ou **observada de $\mathcal{R}ef$** . Desse modo temos que a função-força relativa $\mathcal{R}ef$, da i -ésima partícula do sistema, $\overline{\mathcal{F}}_i$, é dada por

$$\overline{\mathcal{F}}_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N; \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2, \dots, \dot{\bar{r}}_N; t) = m_i \bar{f}_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N; \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2, \dots, \dot{\bar{r}}_N; t), \quad (2.96)$$

onde a função aceleratriz \bar{f}_i é a definida em (2.51). Denotamos por \overline{F}_i o valor dessa função-força, que chamamos **força sobre a i -ésima partícula do sistema, observada de $\mathcal{R}ef$** . Portanto,

$$\overline{F}_i = \overline{\mathcal{F}}_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N; \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2, \dots, \dot{\bar{r}}_N; t). \quad (2.97)$$

A função-força relativa a $\mathcal{R}ef$ deve ser comparada à função-força \mathbf{F}_i definida em (2.70). Para qualificar a última frente à primeira poderíamos dizer que \mathbf{F}_i é a função-força relativa à origem de $\mathcal{R}ef$. Entretanto, não devemos nos preocupar com essas qualificações para funções-força, pois em breve veremos que $\overline{\mathcal{F}}_i$ não depende de $\mathcal{R}ef$ e tampouco \mathbf{F}_i , da origem de $\mathcal{R}ef$. Naturalmente, podemos passar de $\overline{\mathcal{F}}_i$ para \mathbf{F}_i , e vice-versa, usando o isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$ associado à base do referencial $\mathcal{R}ef$. A relação entre o valor da função $\overline{\mathcal{F}}_i$ e o valor correspondente da função \mathbf{F}_i é, simplesmente, $\overline{F}_i = \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbf{F}_i)$.

Em um referencial inercial $\mathcal{R}ef$, a Segunda Lei de Newton aplicada às partículas do sistema isolado resulta nas equações

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \overline{\mathcal{F}}_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N; \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2, \dots, \dot{\bar{r}}_N; t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.98)$$

ou, usando a definição de força (2.97),

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \overline{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.99)$$

Em um outro referencial inercial $\mathcal{R}ef'$ a Segunda Lei de Newton aplicada às partículas do mesmo sistema leva às equações análogas

$$m_i \ddot{\bar{r}}'_i = \overline{\mathcal{F}}'_i(\bar{r}'_1, \bar{r}'_2, \dots, \bar{r}'_N; \dot{\bar{r}}'_1, \dot{\bar{r}}'_2, \dots, \dot{\bar{r}}'_N; t') \quad (2.100)$$

ou $m_i' \ddot{\vec{r}}_i' = \overline{\mathcal{F}}_i'$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Naturalmente, as variáveis \vec{r}_i' , $\dot{\vec{r}}_i'$ e $\ddot{\vec{r}}_i'$, relativas a $\mathcal{R}ef'$, estão relacionadas às variáveis \vec{r}_i , $\dot{\vec{r}}_i$ e $\ddot{\vec{r}}_i$, relativas a $\mathcal{R}ef$ ($i = 1, 2, \dots, N$), por uma transformação de Galileu.

Evidentemente, o que é, e o que não é movimento possível do sistema isolado em relação a um dado referencial inercial, fica univocamente determinado pela relação que existe nesse referencial entre acelerações, velocidades e posições das partículas do sistema, isto é pelas funções aceleratrizes $\overline{\mathcal{F}}_1/m_1$, $\overline{\mathcal{F}}_2/m_2$, ..., $\overline{\mathcal{F}}_N/m_N$, relativas a esse referencial. Conseqüentemente, o conjunto dos movimentos possíveis do sistema fechado relativos a um dado referencial inercial é univocamente determinado pelas funções aceleratrizes, relativas ao referencial, das partículas do sistema. Portanto, o conjunto dos movimentos possíveis de um sistema fechado relativos a um referencial inercial é igual ao conjunto dos movimentos possíveis do mesmo sistema relativos a outro referencial se, e somente se, cada partícula do sistema tiver a mesma função aceleratriz relativa aos dois referenciais. Desse modo, o princípio da relatividade galileana consiste em afirmar que a função aceleratriz de cada partícula de um sistema fechado é a mesma relativa a qualquer referencial inercial. Dadas as equações de movimento (2.98) e (2.100), para dois referenciais inerciais quaisquer, $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$, respectivamente, temos

$$\frac{\overline{\mathcal{F}}_i'}{m_i'} = \frac{\overline{\mathcal{F}}_i}{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.101)$$

em virtude do princípio da relatividade galileana.

Consideremos dois referenciais inerciais $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$ e as respectivas transformações de Galileu (2.95). Em primeiro lugar observemos que uma aceleração $\ddot{\vec{r}}$ no referencial $\mathcal{R}ef$ transforma-se em uma aceleração $\ddot{\vec{r}}'$ no referencial $\mathcal{R}ef'$ de tal modo que $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$, se a transformação de Galileu for uma translação ou um empurrão, e $\ddot{\vec{r}}' = R\ddot{\vec{r}}$, se for uma rotação R ,

$$\ddot{\vec{r}}' = \begin{cases} \ddot{\vec{r}} & \text{sob translações e empurrões,} \\ R\ddot{\vec{r}} & \text{sob qualquer rotação } R. \end{cases} \quad (2.102)$$

Como rotações preservam os módulos dos vetores, temos

$$|\ddot{\vec{r}}'| = |\ddot{\vec{r}}| \quad (2.103)$$

em qualquer transformação de Galileu restrita. Na verdade, podemos considerar qualquer transformação de Galileu e obter que $\ddot{\vec{r}}' = G\ddot{\vec{r}}$, se G for uma transformação ortogonal qualquer; conseqüentemente, (2.103) é verdadeira para qualquer transformação de Galileu. Portanto, o módulo da aceleração de uma partícula é o mesmo relativo a qualquer referencial inercial. Usando esse resultado no princípio da proporcionalidade das acelerações, obtemos que as constantes m_{ij} da equação (2.61) independem do referencial inercial no qual são definidas. Segue-se que a massa de uma partícula é a mesma em qualquer referencial inercial ou, dito de outro modo, a massa permanece a mesma sob qualquer transformação de Galileu. Grandezas que não mudam quando se troca de referencial inercial são chamadas **invariantes galileanos** ou simplesmente **invariantes**. Acabamos de ver que a massa de uma partícula e o módulo de sua aceleração são invariantes galileanos. A invariância do módulo da aceleração está

expressa na equação (2.103) e a invariância da massa pode ser escrita na forma

$$m'_i = m_i \quad (2.104)$$

onde m_i e m'_i são as massas de uma partícula i nos referenciais $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$, respectivamente.

Usando as equações (2.104) e (2.102) na Segunda Lei de Newton (2.99), obtemos que a força sobre uma partícula é um vetor que, sob transformações de Galileu, se transforma exatamente como a aceleração da partícula. A força tem o mesmo módulo em todos os referenciais inerciais e sofre a mesma rotação que posições, velocidades e acelerações ao passarmos para um referencial rodado.

Usando a invariância da massa (2.104), o princípio da relatividade galileana, dado por (2.101), pode ser reescrito como

$$\overline{\mathcal{F}}'_i = \overline{\mathcal{F}}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.105)$$

i.e., a função-força de qualquer partícula de um sistema isolado é a mesma em qualquer referencial inercial. Portanto, o princípio da relatividade galileana é a afirmação de que as funções-forças das partículas de um sistema isolado são invariantes galileanos.

Dada a Segunda Lei de Newton (2.98) em um referencial inercial $\mathcal{R}ef$, a invariância das massas e das funções-força implica que a Segunda Lei de Newton (2.100) em qualquer outro referencial inercial $\mathcal{R}ef'$ pode ser escrita na forma

$$m_i \ddot{\vec{r}}'_i = \overline{\mathcal{F}}_i(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_N; \dot{\vec{r}}'_1, \dot{\vec{r}}'_2, \dots, \dot{\vec{r}}'_N; t') \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.106)$$

As relações que as transformações de Galileu estabelece entre posições, velocidades e acelerações em (2.98) e (2.106) implicarão propriedades importantes para a função-força, como veremos adiante. Começemos pela transformação de Galileu dada por uma pura translação temporal. Nesse caso, temos que posições, velocidades e acelerações são invariantes e apenas o tempo muda de t para $t' = t + \beta$. Do par de equações (2.98) e (2.106), obtemos

$$\overline{\mathcal{F}}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t + \beta) = \overline{\mathcal{F}}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t). \quad (2.107)$$

Uma vez que β é arbitrário, concluímos que o valor da função-força $\overline{\mathcal{F}}_i$ não depende explicitamente do tempo. Portanto, temos o seguinte resultado de fundamental importância: em um sistema isolado as forças não dependem explicitamente do tempo. Passaremos então a omitir a variável t das funções-força e, por simplicidade, continuaremos a denotá-las pelo mesmos símbolos até agora utilizados. Portanto, doravante podemos escrever (2.98), a Segunda Lei de Newton de um sistema isolado, em qualquer referencial inercial $\mathcal{R}ef$, na forma

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \overline{\mathcal{F}}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.108)$$

Considerando como transformação de Galileu uma pura translação espacial concluímos, por um procedimento análogo ao que acabamos de realizar no caso de pura

transformação temporal, que as forças em um sistema isolado não dependem das posições das partículas independentemente, mas apenas das suas posições relativas, isto é, das diferenças $\bar{r}_{ij} = \bar{r}_i - \bar{r}_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, N; i < j$). É suficiente demonstrar essa propriedade para as forças de interação entre pares de partículas, pois qualquer força é uma superposição delas, como atesta a equação (2.75). Consideremos pois o sistema isolado constituído apenas pelas partículas i e j . Se do referencial \mathcal{R}_{ef} observamos o movimento possível que satisfaz

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{\mathcal{F}}_{ij}(\bar{r}_i, \bar{r}_j; \dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_j), \quad (2.109)$$

então, do referencial \mathcal{R}_{ef}' observamos o movimento que satisfaz

$$m_i \ddot{\bar{r}}'_i = \bar{\mathcal{F}}_{ij}(\bar{r}'_i, \bar{r}'_j; \dot{\bar{r}}'_i, \dot{\bar{r}}'_j). \quad (2.110)$$

Sob uma pura translação espacial \bar{b} , temos $\bar{r}'_i = \bar{r}_i + \bar{b}$, $\bar{r}'_j = \bar{r}_j + \bar{b}$ e, conseqüentemente, velocidades e acelerações invariantes. Usando esses resultados em (2.109) e (2.110), obtemos

$$\bar{\mathcal{F}}_{ij}(\bar{r}'_i, \bar{r}'_j; \dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_j) = \bar{\mathcal{F}}_{ij}(\bar{r}_i, \bar{r}_j; \dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_j). \quad (2.111)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\bar{r}_{ij} = \bar{r}_i - \bar{r}_j \quad \text{e} \quad \bar{s}_{ij} = \bar{r}_i + \bar{r}_j, \quad (2.112)$$

podemos escrever a força como uma função $\bar{\Phi}_{ij}$ das variáveis \bar{r}_{ij} e \bar{s}_{ij} ,

$$\bar{\mathcal{F}}_{ij}(\bar{r}_i, \bar{r}_j; \dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_j) = \bar{\Phi}_{ij}(\bar{r}_{ij}, \bar{s}_{ij}; \dot{\bar{r}}_{ij}, \dot{\bar{s}}_{ij}). \quad (2.113)$$

A condição (2.111), para a pura translação \bar{b} pode ser escrita em termos da função $\bar{\Phi}_{ij}$,

$$\bar{\Phi}_{ij}(\bar{r}_{ij}, \bar{s}_{ij} + 2\bar{b}; \dot{\bar{r}}_{ij}, \dot{\bar{s}}_{ij}) = \bar{\Phi}_{ij}(\bar{r}_{ij}, \bar{s}_{ij}; \dot{\bar{r}}_{ij}, \dot{\bar{s}}_{ij}). \quad (2.114)$$

Uma vez que \bar{b} é arbitrário, concluímos que $\bar{\Phi}_{ij}$ não depende de \bar{s}_{ij} . A equação (2.113) permite, então, concluir que $\bar{\mathcal{F}}_{ij}$ é uma função das posições apenas por intermédio da posição relativa $\bar{r}_{ij} = \bar{r}_i - \bar{r}_j$. Análogamente, considerando como transformação de Galileu um puro empurrão, obtemos que $\bar{\mathcal{F}}_{ij}$ é uma função das velocidades apenas por intermédio da velocidade relativa $\dot{\bar{r}}_{ij} = \dot{\bar{r}}_i - \dot{\bar{r}}_j$. Em suma, forças de interação entre duas partículas de um sistema isolado dependem apenas das posições relativas e velocidades relativas das partículas. Representando a função que dá a força \bar{F}_{ij} em termos de posições e velocidades relativas pelo mesmo símbolo $\bar{\mathcal{F}}_{ij}$, temos

$$\bar{F}_{ij} = \bar{\mathcal{F}}_{ij}(\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij}). \quad (2.115)$$

Usando o princípio da superposição (2.75) concluímos que qualquer força em um sistema isolado depende apenas das posições e velocidades relativas das partículas do sistema.

Finalmente, se considerarmos como transformação de Galileu uma pura rotação R , temos $\bar{r}'_i = R\bar{r}_i$, $\dot{\bar{r}}'_i = R\dot{\bar{r}}_i$ e $\ddot{\bar{r}}'_i = R\ddot{\bar{r}}_i$. Nesse caso, obtemos a seguinte condição para a função-força da i -ésima partícula do sistema isolado

$$\begin{aligned} R^{-1}\bar{F}_i(R\bar{r}_1, R\bar{r}_2, \dots, R\bar{r}_N; R\dot{\bar{r}}_1, R\dot{\bar{r}}_2, \dots, R\dot{\bar{r}}_N) &= \\ &= \bar{F}_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N; \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2, \dots, \dot{\bar{r}}_N). \end{aligned} \quad (2.116)$$

No caso das forças de interação entre duas partículas que dependem apenas da posição relativa entre as partículas, podemos usar esse resultado, juntamente com (2.115) para obter $R^{-1}\overline{\mathbf{F}}_{ij}(R\overline{\mathbf{r}}_{ij}) = \overline{\mathbf{F}}_{ij}(\overline{\mathbf{r}}_{ij})$. Tomando-se o módulo de ambos os membros dessa igualdade, obtemos $|\overline{\mathbf{F}}_{ij}(R\overline{\mathbf{r}}_{ij})| = |\overline{\mathbf{F}}_{ij}(\overline{\mathbf{r}}_{ij})|$. Uma vez que a rotação R é arbitrária, concluímos que o módulo da força de interação depende apenas do módulo da posição relativa das partículas i e j , ou seja, depende apenas da distância entre as partículas i e j . Devemos apreciar a enorme simplificação que o princípio da relatividade galileana impõe às funções que dão as forças na Mecânica Clássica.

O paradigma de força na Mecânica Clássica é a força de interação gravitacional entre duas partículas. Ela depende apenas das posições relativas das duas partículas e é universal, i.e., existe entre qualquer par de partículas. Para um par arbitrário de partículas, digamos a i -ésima e a j -ésima, a força sobre a i -ésima devido a j -ésima é dada por

$$\overline{\mathbf{F}}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\overline{\mathbf{r}}_{ij}|^2} \frac{\overline{\mathbf{r}}_{ij}}{|\overline{\mathbf{r}}_{ij}|} \quad (2.117)$$

onde $G = 6,672.59(8.5) \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ é chamada **constante universal da gravitação**. Usando o isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$ associado à base \mathcal{B} do referencial em uso, podemos voltar aos vetores de $\overline{\mathcal{E}}$ e escrever

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}. \quad (2.118)$$

Vemos que a força gravitacional entre as partículas tem a direção da reta que une as partículas e aponta sempre para a partícula que exerce a força, i.e., é atrativa; o módulo da força é proporcional ao produto das massas das partículas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. Em todos os referenciais inerciais se observa o mesmo módulo e sentido para essa força; apenas os ângulos que ela faz com os eixos do referencial, i.e., a direção em que é observada, depende do referencial em uso.

2.6 Sistemas de partículas.

Consideremos um sistema isolado cujo número total de partículas será agora representado por N_T . As equações de movimento para esse sistema são

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_T}; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{N_T}) \quad (i = 1, \dots, N_T). \quad (2.119)$$

Consideremos agora o sistema físico \mathcal{S} constituído por N partículas, dentre as N_T partículas do sistema isolado ($N < N_T$). Em geral, o sistema \mathcal{S} não pode ser considerado como isolado, pois as partículas do sistema isolado que não pertencem a ele podem exercer forças sobre as partículas que pertencem a ele. Vamos numerar as partículas do sistema total isolado de tal modo que as N primeiras sejam as partículas do sistema \mathcal{S} . As restantes $N_T - N$ partículas formam a vizinhança do sistema \mathcal{S} . As equações de movimento para as partículas do sistema \mathcal{S} são

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}_{N+1}, \dots, \mathbf{r}_{N_T}; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \dot{\mathbf{r}}_{N+1}, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{N_T}) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.120)$$

Em geral, essas equações não são suficientes para determinar os movimentos possíveis do sistema \mathcal{S} , pois há N equações para um número de incógnitas N_T maior do que N . De fato, nos membros direitos das equações (2.120), além das incógnitas do sistema \mathcal{S} , há as incógnitas das vizinhanças. Para que (2.120) seja suficiente para determinar o movimento de \mathcal{S} é necessário sabermos os movimentos das partículas das vizinhanças de \mathcal{S} . Vamos supor que os movimentos dessas partículas da vizinhança foram obtidos, seja resolvendo suas equações de movimento, seja a partir de observações experimentais. Digamos que seus movimentos são dados por

$$\mathbf{r}_j = \boldsymbol{\phi}_j(t) \quad (j = N + 1, \dots, N_T). \quad (2.121)$$

Usamos esses movimentos conhecidos para eliminar de \mathcal{F}_i em (2.120) as variáveis das vizinhanças e obter uma nova função $\mathcal{F}^{(ef)}$, que depende apenas das variáveis do sistema \mathcal{S} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^{(ef)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) &:= \\ &:= \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \boldsymbol{\phi}_{N+1}(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_{N_T}(t); \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \dot{\boldsymbol{\phi}}_{N+1}(t), \dots, \dot{\boldsymbol{\phi}}_{N_T}(t)). \end{aligned} \quad (2.122)$$

Com isso, as N equações em (2.120) podem ser escritas como

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathcal{F}_i^{(ef)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.123)$$

A função $\mathcal{F}_i^{(ef)}$ é chamada **função-força efetiva** sobre a partícula i . Esse nome quer significar que $\mathcal{F}_i^{(ef)}$ descreve os mesmos efeitos que a verdadeira força \mathcal{F}_i , como é evidente em (2.122), sem contudo usar todas as variáveis de \mathcal{F}_i . De fato, as posições e velocidades das partículas da vizinhança de \mathcal{S} foram eliminadas do problema para dar lugar ao tempo, que aparece como variável da função-força efetiva.

Naturalmente, chamaremos **força efetiva** o valor da função-força efetiva. Representando por $\mathbf{F}_i^{(ef)}$ a força efetiva total sobre a partícula i do sistema \mathcal{S} , temos

$$\mathbf{F}_i^{(ef)} = \mathcal{F}_i^{(ef)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.124)$$

Em (2.123) temos N equações para os N movimentos incógnitos das N partículas do sistema \mathcal{S} . Em princípio, elas podem ser resolvidas para determinarmos todos os movimentos possíveis do sistema não-isolado \mathcal{S} .

O conceito de força efetiva mostra em que sentido podemos dizer que uma força sobre uma partícula do sistema depende explicitamente do tempo. Isso significa que a força é efetiva, o sistema não é isolado e variáveis das vizinhanças foram eliminadas para dar origem à dependência temporal explícita. Estando bem entendido o conceito de força efetiva, nos dispensaremos de usar símbolos especiais para as forças efetivas e o adjetivo “efetiva” para elas. Bastará sua dependência temporal explícita para indicar que ela é uma força efetiva sobre um sistema não-isolado. Com isso, reescreveremos (2.123), simplesmente, como

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.125)$$

As forças exercidas sobre a i -ésima partícula do sistema \mathcal{S} , pelas demais partículas do sistema \mathcal{S} , são chamadas **forças internas** sobre a i -ésima partícula e suas correspondentes funções-força, **funções-força internas** da partícula i . A soma de todas as forças internas sobre a i -ésima partícula é chamada de **força interna total** sobre ela e é denotada por \mathbf{F}_i^{in} , e a sua função-força correspondente, **função-força interna total**, que é denotada por \mathcal{F}_i^{in} . Pelo princípio da superposição, temos

$$\mathbf{F}_i^{in} = \sum_{j=1(j \neq i)}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (2.126)$$

ou, em termos das funções-força,

$$\mathcal{F}_i^{in}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij}), \quad (2.127)$$

onde usamos o princípio da superposição e o resultado (2.115).

As forças sobre a i -ésima partícula do sistema \mathcal{S} , exercidas pelas partículas que não pertencem ao sistema \mathcal{S} , i.e., por sua vizinhança, são chamadas **forças externas** sobre a i -ésima partícula, e as correspondentes funções-força, **funções-forças externas**. **Força externa total** sobre a i -ésima partícula é a soma de todas as forças externas sobre ela; a correspondente função-força é denominada **função-força externa total** da partícula i . Denotamos a força externa total e sua correspondente função-força por \mathbf{F}_i^{ex} e \mathcal{F}_i^{ex} , respectivamente. Temos, então,

$$\mathbf{F}_i^{ex} = \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i; t). \quad (2.128)$$

Naturalmente, a força total sobre a partícula i do sistema \mathcal{S} é a soma das forças interna total e externa total sobre ela,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in}. \quad (2.129)$$

Em termos das funções-forças temos

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij}) + \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i; t). \quad (2.130)$$

Usando essa decomposição em forças internas e externas podemos escrever as equações do movimento (2.125) na forma

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.131)$$

ou seja,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij}) + \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i; t). \quad (2.132)$$

Naturalmente, não há forças externas sobre um sistema isolado. No caso em que o sistema \mathcal{S} é constituído por uma única partícula ($N = 1$), não há forças internas sobre ela. Denotando por \mathbf{r} a posição da única partícula, por m a sua massa e por \mathcal{F} a sua função-força, temos o seguinte caso particular de (2.125):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; t) \quad (2.133)$$

Voltemos ao sistema \mathcal{S} com um número arbitrário N de partículas. Devido à Terceira Lei de Newton, a soma de todas as forças internas (2.127) sobre as partículas do sistema é zero,

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i^{in}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij}) = \mathbf{0}. \quad (2.134)$$

Para explorar as conseqüências desse fato vamos somar todas as equações de movimento do sistema, conforme dadas em (2.132); obtemos

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i; t) \quad (2.135)$$

Definindo algumas novas grandezas essa equação pode ser posta em uma forma sugestiva

Primeiramente, definimos **força externa total** sobre o sistema \mathcal{S} como sendo a soma de todas as forças externas sobre as suas partículas e a correspondente função-força é chamada **função-força externa total**. Representamos a força externa total por \mathbf{F}^{ex} e a correspondente função-força por \mathcal{F}^{ex} , de modo que podemos escrever

$$\mathbf{F}^{ex} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ex} \quad (2.136)$$

e

$$\mathcal{F}^{ex}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i; t). \quad (2.137)$$

Agora, definimos **massa total do sistema \mathcal{S}** , ou, simplesmente, **massa do sistema \mathcal{S}** , como sendo a soma das massas de suas partículas; denotando-a por M , temos

$$M := \sum_{i=1}^N m_i. \quad (2.138)$$

Finalmente, definimos **centro de massa** do sistema \mathcal{S} como sendo o ponto cujo vetor-posição é

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i. \quad (2.139)$$

Usando (2.136) e (2.139) em (2.135) obtemos

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathcal{F}^{ex}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t). \quad (2.140)$$

Comparando essa expressão com (2.133) concluímos que o centro de massa do sistema move-se como se fosse uma partícula com massa igual à massa total do sistema e sujeita a uma força total igual à força externa total sobre o sistema. Note que essa analogia tem limitações, pois não podemos fazer uma afirmação análoga à anterior falando em função-força total, ao invés de força-total. De fato, no caso de uma única partícula, temos que as variáveis da função-força são a posição \mathbf{r} da partícula, a sua velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ e o tempo t , como afirmado em (2.133). Já em (2.140) as variáveis da função-força externa total não são a posição \mathbf{R} do centro de massa, a sua velocidade $\dot{\mathbf{R}}$ e o tempo t , mas as posições e velocidades de todas as partículas do sistema e o tempo t .

A equação (2.140) determina completamente os movimentos possíveis do sistema quando esse está restrito a ter movimentos ditos de pura translação. Um sistema está em movimento de **pura translação** se, a cada instante, todas as suas partículas têm uma mesma velocidade. Como consequência, o seu centro de massa também tem a cada instante essa mesma velocidade. Seja \mathbf{r}'_i o vetor-posição da partícula i relativo ao centro de massa, $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$. Temos que a velocidade relativa é nula durante a pura translação, $\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, pois o centro de massa, a partícula i , e as demais partículas têm a mesma velocidade a cada instante, nesse tipo de movimento. Consequentemente, nesse caso \mathbf{r}'_i é um vetor constante \mathbf{c}_i . Portanto, na pura translação,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{c}_i \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.141)$$

Usando esses resultados na função-força que aparece no membro direito de (2.140) obtemos uma função \mathcal{F} cujas variáveis são apenas a posição do centro de massa \mathbf{R} , sua velocidade $\dot{\mathbf{R}}$ e o tempo t ,

$$\mathcal{F}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}; t) = \mathcal{F}^{ex}(\mathbf{R} + \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{R} + \mathbf{c}_N; \dot{\mathbf{R}}, \dots, \dot{\mathbf{R}}; t). \quad (2.142)$$

Usando esse resultado na equação de movimento (2.140), obtemos

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}; t) \quad (2.143)$$

Comparando-se essa equação com (2.133) vemos que o centro de massa de um sistema em translação pura comporta-se exatamente como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema. Dadas a condição inicial do sistema em pura translação, determinamos as constantes \mathbf{c}_i ($i = 1, \dots, N$), e a posição e velocidade iniciais do centro de massa. Com esses dados e com a equação de movimento (2.143), determinamos o movimento do centro de massa e, por intermédio de (2.141), o movimento de todas as partículas do sistema em pura translação. Em um movimento de pura translação as distâncias entre as partículas não mudam e o sistema pode ser considerado um corpo rígido. O movimento de pura translação é um dos movimentos que respeita a condição de rigidez de um corpo.

Definimos força total de um sistema sobre outro como sendo a soma das forças que todas as partículas do primeiro exercem sobre todas as partículas do segundo. Usando a Terceira Lei de Newton, que é enunciada para um par de partículas arbitrárias, é fácil demonstrar que ela também é válida para um par de sistemas arbitrários.

A força que um corpo exerce sobre outro e a força que esse outro exerce sobre o primeiro têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos.

Também é fácil concluir que a força que um sistema exerce sobre outro é uma função das posições e velocidades das partículas dos dois sistemas. No entanto, no caso de forças de contato entre dois corpos rígidos, surge uma situação intrigante. Na realidade, sabemos que não existem corpos absolutamente rígidos; todo corpo sob pressão se deforma. Chamamos de rígidos aqueles que se deformam pouco ou bastante para os propósitos que temos em vista. Quando tais corpos entram em contato, como no caso de um livro sobre a mesa, eles se deformam e exercem forças de contato um sobre o outro. Essas forças de contato entre eles dependem das pequenas deformações que sofrem, isto é, das posições em que suas partículas se situam devido às deformações. Essa descrição das forças de contato se enquadra no conceito que temos de força como função das posições das partículas e, possivelmente, também de suas velocidades. No entanto, se considerarmos os dois corpos como absoluta e perfeitamente rígidos, não haverá deformação por contato e suas partículas permanecem invariavelmente nas mesmas posições com as mesmas velocidades. Ao mesmo tempo que as forças de contato entre eles podem assumir diversos valores. No caso do livro sobre a mesa as forças de contato entre eles podem aumentar se aumentarmos a pressão do livro sobre a mesa. Temos então que, para corpos perfeitamente rígidos, para uma dada configuração de suas partículas, e uma dada distribuição de velocidades, podem corresponder diversos valores para as forças entre eles. Isso está em contradição com a definição de força como uma função das posições e velocidades das partículas dos sistemas envolvidos. Essa contradição pode ser evitada se não considerarmos nenhum corpo como perfeitamente rígido, mas existe um outro procedimento muito útil nas situações práticas; consiste em expandir o conceito de força para incluir também as chamadas forças vinculares. **Forças vinculares de contato** são limites das forças de contato usuais entre os corpos quando a rigidez de tais corpos tende a se tornar perfeita. Como acabamos de discutir, tal limite não é uma função de posições e velocidades das partículas dos corpos em contato. O limite é um vetor que depende do tempo de um modo que não sabemos qual é antes de determinar o movimento do sistema no qual estão contidos os corpos absolutamente rígidos em consideração. Sendo assim, as forças vinculares são funções do tempo que devemos determinar juntamente com os movimentos do sistema. Quando consideramos algumas forças como vinculares, as forças usuais, dadas em função de posições e velocidades das partículas do sistema, passam a ser chamadas **forças dadas**. No caso do livro sobre a mesa, a força vincular impede o livro de penetrar na mesa e costuma ser chamada **força normal**; nesse contexto normal significa perpendicular à superfície de contato entre o livro e a mesa.

Consideremos, novamente, um sistema de N partículas. Agora, vamos denotar por $\mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t)$ a soma de todas as forças dadas sobre a partícula i , e por $\mathbf{N}_i(t)$ a soma de todas as forças sobre a partícula i que foram consideradas como forças vinculares. Portanto, a força total sobre a partícula i é $\mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) + \mathbf{N}_i(t)$, e as equações de movimento para as partículas do sistema tomam, agora, a

forma

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) + \mathbf{N}_i(t) \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (2.144)$$

Note que, agora, além das N incógnitas, que são os movimentos procurados das N partículas, temos também como incógnitas as forças vinculares $\mathbf{N}_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$). Esse excesso de incógnitas não significa que o problema não possa ser resolvido, pois há informações extras sobre o movimento do sistema, que são dados pela rigidez absoluta dos corpos que deram origem às forças vinculares. No caso do livro sobre a mesa, por exemplo, há a informação de que o livro em seu movimento não pode atravessar a superfície absolutamente rígida da mesa. As restrições impostas ao movimento dos corpos devido à hipótese de rigidez absoluta são chamadas **vínculos de contato** sobre o sistema. Procuramos resolver o problema de encontrar o movimento do sistema sob uma dada condição inicial e determinar as forças de vínculo, usando as equações de movimento (2.144) e as informações dadas pelos vínculos sobre o sistema.

Capítulo 3

Movimento Unidimensional de uma Partícula

3.1 Introdução

O movimento unidimensional, i.e., restrito a uma reta, ocorre em diversas situações, como na queda livre de uma partícula próxima à Terra, na oscilação de um pistão e em certos trechos de movimentos mais complexos. É importante estudá-lo também porque oferece exemplos simples de aplicações dos princípios da dinâmica e de alguns métodos muito úteis para a solução de problemas.

É fácil ver como o movimento unidimensional de uma partícula se enquadra nos princípios da dinâmica. Seja uma partícula de massa m , com vetor-posição \mathbf{r} e sujeita a uma força total \mathbf{F} . A segunda lei de Newton afirma que

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad (3.1)$$

conforme estabelecemos em (2.133). Suponhamos que \mathbf{F} tenha uma direção fixa no espaço e escolhamos um sistema de eixos $O\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ de tal modo que um dos eixos, digamos o $O\mathcal{X}$, tenha a direção da força. Nesse caso $F_y = F_z = 0$, $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}}$ e (3.1) é equivalente às equações

$$m \ddot{x} = F_x = \mathcal{F}_x(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad m \ddot{y} = 0 \quad \text{e} \quad m \ddot{z} = 0. \quad (3.2)$$

As duas últimas equações têm soluções $y = y_0 + v_{y0}t$ e $z = z_0 + v_{z0}t$, respectivamente, onde y_0 , z_0 , v_{y0} e v_{z0} são constantes dadas pelas condições iniciais. Se tais constantes não forem nulas, é sempre possível passar para um outro referencial inercial com eixos $O'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ tais que $x' = x$, $y' = y - y_0 - v_{y0}t$ e $z' = z - z_0 - v_{z0}t$; de fato, o outro referencial pode ser obtido do original por meio de uma translação $\mathbf{a} = y_0 \hat{\mathbf{y}} + z_0 \hat{\mathbf{z}}$ e um empurrão de velocidade $\mathbf{u} = v_{y0} \hat{\mathbf{y}} + v_{z0} \hat{\mathbf{z}}$. Nesse novo referencial o vetor-posição tem componentes apenas no eixo $O\mathcal{X}$, i.e., na direção da força. Em geral a mudança de referencial muda as funções-movimento da vizinhança da partícula, o que muda

também a função-força efetiva \mathcal{F} da Segunda Lei de Newton (3.1). Ainda assim, a função-força continua sendo uma função apenas da posição da partícula, da sua velocidade e do tempo. Vamos continuar a representar por \mathcal{F} a nova função-força após a possível mudança de referencial; também continuaremos a denotar por \mathbf{r} o vetor-posição relativo à origem do novo referencial. Em suma, no caso de uma força com direção constante, podemos escolher um referencial inercial no qual o vetor-posição da partícula tem essa mesma direção. Se $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}}$, temos, então, $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}}$. Segue-se que $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \hat{\mathbf{x}}$ e que posições e velocidades iniciais também estão no eixo $O\mathcal{X}$. digamos que elas são dadas no instante t_0 e são representadas respectivamente por $\mathbf{r}_0 = x_0 \hat{\mathbf{x}}$ e $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{x}_0 \hat{\mathbf{x}}$. O único vetor presente no problema é agora o unitário constante $\hat{\mathbf{x}}$. Podemos, então, simplificar a notação e escrever a primeira equação em (3.2) como

$$m \ddot{x} = F_x = \mathcal{F}_x(x, \dot{x}, t). \quad (3.3)$$

Vamos escrever F no lugar de F_x , \mathcal{F} no lugar de \mathcal{F}_x , e representar a velocidade \dot{x} , alternativamente, por v . Com isso, podemos escrever (3.3) na forma

$$m \ddot{x} = F = \mathcal{F}(x, v, t). \quad (3.4)$$

Em resumo, se a força total sobre uma partícula tem direção constante, é sempre possível usar um referencial inercial no qual o movimento da partícula é retilíneo e na direção da força. Reciprocamente, se o movimento da partícula é retilíneo, a força total sobre ela tem, forçosamente, direção constante e ao longo do movimento.

Conforme discutido anteriormente, cada movimento de uma partícula é dado pelas três funções ϕ_x , ϕ_y e ϕ_z , que determinam, a cada instante t durante o movimento, as coordenadas da partícula, $x = \phi_x(t)$, $y = \phi_y(t)$ e $z = \phi_z(t)$. No caso em consideração, de movimento retilíneo ao longo do eixo $O\mathcal{X}$, o movimento fica totalmente especificado pela função ϕ_x ; as coordenadas y e z são sempre nulas e a coordenada x é dada, a cada instante t , por $x = \phi_x(t)$. Vamos simplificar a notação e escrever ϕ no lugar de ϕ_x .

A equação (3.4) é uma equação diferencial ordinária normal de segunda ordem. Como anteriormente postulado, suas soluções são os movimentos possíveis da partícula e há uma única solução para cada condição inicial dada, digamos a posição x_0 e a velocidade v_0 em um instante t_0 . Desse modo, uma função ϕ é um movimento possível da partícula se, e somente se, é uma solução de (3.4). Além disso, dentre todas as soluções existe uma única solução ϕ que satisfaz à condição inicial do problema, *i.e.*, tal que $\phi(t_0) = x_0$ e $\dot{\phi}(t_0) = v_0$. No restante do capítulo estudaremos métodos de resolver a equação diferencial (3.4) em algumas situações simples e importantes. Primeiro estudaremos as situações em que F depende apenas de uma dentre as três variáveis x , v e t . Veremos que nestes três casos a solução de (3.4) reduz-se a quadraturas. Também estudaremos o caso importantíssimo em que F depende das três variáveis x , v e t , porém linearmente de x e v .

Dado um movimento ϕ , podemos expressar a força como função do tempo: $F = \mathcal{F}(x, v, t) = \mathcal{F}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t)$; nesse caso, (3.4) nos dá a aceleração em função do tempo,

$$m \ddot{x} = \mathcal{F}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t). \quad (3.5)$$

Integrando no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ ambos os membros desta equação, obtemos

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{F}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t), \quad (3.6)$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades da partícula nos instantes inicial e final do intervalo, respectivamente,

$$v_1 = \dot{\phi}(t_1) \quad \text{e} \quad v_2 = \dot{\phi}(t_2). \quad (3.7)$$

Para a integral no membro direito da equação, (3.6) escrevemos

$$\int_{t_1(\phi)}^{t_2} dt F := \int_{t_1(\phi)}^{t_2} dt \mathcal{F}(x, v, t) := \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{F}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t). \quad (3.8)$$

Essa integral é chamada **impulso** fornecido à partícula pela força F no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ durante o movimento ϕ .

O produto da massa da partícula pela sua velocidade é o momento linear da partícula, conforme definimos em (2.78). O membro esquerdo de (3.6) é, portanto, a variação do momento linear da partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ durante o movimento ϕ . Notemos que, enquanto o movimento ϕ em consideração está explicitado no membro direito da equação (3.6), ele está subentendido no membro esquerdo; para que tal movimento ficasse explícito também no membro esquerdo, ele teria que ser escrito na forma $m\dot{\phi}(t_2) - m\dot{\phi}(t_1)$.

Em (3.6) temos a afirmação de que a variação do momento linear de uma partícula é igual ao impulso fornecido pela força resultante sobre ela. Podemos chamar esse resultado de **teorema do impulso e momento linear**.

Multiplicando os dois membros de (3.5) pela velocidade $\dot{x} = \dot{\phi}(t)$ obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{\phi}(t)^2 \right] = \mathcal{F}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t) \dot{\phi}(t), \quad (3.9)$$

i.e.,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = F v. \quad (3.10)$$

A quantidade

$$T := \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.11)$$

é chamada **energia cinética** da partícula de massa m com velocidade v . O produto de uma força sobre uma partícula pela velocidade da partícula, ambas em um mesmo instante, é chamado **potência** da força no instante considerado. A equação (3.10) afirma que, a cada instante, a taxa instantânea de variação da energia cinética de uma partícula é igual à potência da resultante,

$$\frac{dT}{dt} = F v. \quad (3.12)$$

Integrando (3.10) no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ do movimento ϕ , obtemos

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{t_1(\phi)}^{t_2} dt F v, \quad (3.13)$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades da partícula nos respectivos instantes inicial e final do intervalo, conforme especificado em (3.7), e o membro direito é definido por

$$\int_{t_1(\phi)}^{t_2} dt Fv := \int_{t_1(\phi)}^{t_2} dt \mathcal{F}(x, v, t) v := \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{F}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t) \dot{\phi}(t). \quad (3.14)$$

Essa integral é chamada **trabalho** realizado pela força F durante o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ do movimento ϕ .

A equação (3.13) afirma pois que a variação da energia cinética durante um intervalo de tempo do movimento é igual ao trabalho realizado pela resultante neste intervalo. Esse resultado é conhecido como **teorema do trabalho e energia cinética**.

3.2 Força aplicada dependente apenas do tempo

Uma força que depende somente do tempo ocorre na situação especialíssima em que a ação efetiva da vizinhança sobre a partícula é insensível ao movimento da partícula. Nesse caso dizemos que a força é **prescrita**. Se a força total sobre uma partícula é prescrita, a Segunda Lei de Newton (3.3) toma a forma

$$m\ddot{x} = \mathcal{F}(t). \quad (3.15)$$

A solução geral desta equação é obtida de imediato por duas integrações consecutivas,

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \mathcal{F}(t''), \quad (3.16)$$

onde x_0 e v_0 são a posição e a velocidade no instante t_0 .

Um exemplo particularmente importante de força prescrita é dado pela força que podemos chamar **harmônica** (simples),

$$F = \mathcal{F}(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta_0), \quad (3.17)$$

onde F_0 é a amplitude da força, ω a sua frequência angular e θ_0 sua fase inicial; como de costume, chamamos $\omega t + \theta_0$ de fase no instante t da função harmônica e da grandeza que ela representa; no caso a função harmônica cosseno e a força em (3.17). Substituindo (3.17) em (3.16), obtemos

$$x = x_0 + \frac{F_0 \cos \theta_0}{m\omega^2} + \left(v_0 - \frac{F_0 \sin \theta_0}{m\omega} \right) t - \frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta_0). \quad (3.18)$$

Vemos que o movimento da partícula é a superposição, na mesma direção, de um movimento uniforme

$$x_{un} := x_0 + \frac{F_0 \cos \theta_0}{m\omega^2} + \left(v_0 - \frac{F_0 \sin \theta_0}{m\omega} \right) t \quad (3.19)$$

com um movimento oscilatório

$$x_{os} := -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta_0). \quad (3.20)$$

O movimento oscilatório se processa com a mesma frequência ω que a força prescrita, porém dela defasado de meio ciclo,

$$x_{os} = \frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta_0 - \pi) = \frac{\mathcal{F}(t - T/2)}{m\omega^2}, \quad (3.21)$$

onde representamos por T o período de oscilação $2\pi/\omega$. O movimento uniforme pode ser eliminado passando-se para um referencial inercial no qual a posição da partícula é $x' = x - a - ut$, onde $a = x_0 + (F_0 \cos \theta_0/m\omega^2)$ e $u = v_0 - (F_0 \sin \theta_0/m\omega)$. O movimento remanescente, i.e., o oscilatório, não depende das condições iniciais, mas apenas das características da força aplicada e da massa da partícula, conforme evidencia a equação (3.21). Esse exemplo simples é útil no estudo da propagação de ondas de rádio na ionosfera.

3.3 Força dependente apenas da velocidade

No caso em que a força sobre uma partícula de massa m e posição x depende apenas da velocidade v da partícula, a Segunda Lei de Newton (3.3) toma a forma

$$m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F}(v) \quad (3.22)$$

Supondo que a força não se anula no intervalo de tempo $[t_0, t]$, obtemos

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{\mathcal{F}(v')} = \frac{1}{m}(t - t_0), \quad (3.23)$$

onde v_0 é a velocidade no instante t_0 . O membro esquerdo desta equação, dado pela integral, é uma função de v_0 e v . Restringindo-nos a um intervalo de tempo no qual v pode ser explicitada, obtemos a velocidade v como uma função ξ do tempo t ,

$$v = \xi \left(v_0, \frac{t - t_0}{m} \right). \quad (3.24)$$

A solução para x é, então,

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \xi \left(v_0, \frac{t' - t_0}{m} \right) dt', \quad (3.25)$$

onde x_0 é a posição no instante t_0 . A solução de (3.22) ficou pois reduzida às duas quaraturas em (3.23) e (3.25).

Uma situação comum, na qual encontramos forças dependentes da velocidade, é no atrito entre corpos em movimento relativo. A força de atrito entre superfícies secas em contato é muitas vezes dada por uma expressão simples, enquanto a força entre superfícies lubrificadas é, normalmente, dada por expressões complicadas. Estamos aqui interessados em uma terceira situação, na qual a força de atrito é exercida por um meio fluido sobre uma partícula que nele se move. Em muitos caso de interesse, dentro de um certo domínio de velocidades, essa força tem módulo proporcional a

uma certa potência n -ésima do módulo da velocidade; mais explicitamente, é dada por

$$\mathcal{F}(v) = -\text{sgn}(v) b |v|^n, \quad (3.26)$$

onde b é uma constante característica do meio fluido e da partícula, e $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a chamada **função sinal**, definida por

$$\text{sgn}(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v > 0, \\ 0 & \text{se } v = 0, \\ -1 & \text{se } v < 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

A função sinal em (3.26) garante que a força de atrito $\mathcal{F}(v)$ tenha sempre o sentido oposto ao da velocidade v .

Consideremos o caso $n = 1$, i.e., de atrito proporcional à velocidade,

$$\mathcal{F}(v) = -b v. \quad (3.28)$$

Substituindo essa expressão em (3.23) obtemos (3.24) com a forma

$$v = v_0 e^{-t/\tau}, \quad (3.29)$$

onde fizemos $t_0 = 0$ e definimos

$$\tau := \frac{m}{b}. \quad (3.30)$$

A constante τ é o tempo que a partícula demoraria para parar se mantivesse sempre a aceleração do instante inicial, i.e., se seu movimento fosse uniformemente retardado. É claro que o movimento não é uniformemente retardado e (3.29) mostra que a partícula nunca pára; sua velocidade aproxima-se assintoticamente de zero quando $t \rightarrow \infty$. A constante τ também pode ser caracterizada como o tempo gasto para que a velocidade da partícula se reduza a $(1/e) \approx 37\%$ de seu valor inicial. De acordo com sua definição (3.30), τ cresce com a massa da partícula e diminui com o coeficiente b da força de atrito (3.28), duas características em acordo com nossa intuição sobre o fenômeno.

Integrando (3.29) no tempo obtemos:

$$x = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}), \quad (3.31)$$

onde tomamos $x_0 = 0$. A distância total coberta pela partícula nesse movimento é

$$x_T = v_0 \tau = \frac{m v_0}{b}, \quad (3.32)$$

que é obtida tomando-se o limite de (3.31) quando $t \rightarrow \infty$.

Bem no início do movimento, quando $t \ll \tau$, podemos expandir (3.29) e (3.31) em potências de t/τ e reter apenas os primeiros termos, para obter uma descrição aproximada do movimento. Retendo apenas a primeira potência de t/τ , obtemos

$$x \approx v_0 t - \frac{1}{2} \frac{b v_0}{m} t^2 \quad \text{e} \quad v \approx v_0 - \frac{b v_0}{m} t. \quad (3.33)$$

Essas equações mostram que, no início, o movimento é aproximadamente um movimento uniformemente retardado, cuja aceleração é a do instante inicial, $\mathcal{F}(v_0)/m = -b v_0/m$.

A equação do movimento desse problema, dada pela força (3.28), é uma equação diferencial para a velocidade v , da forma

$$\frac{dv}{dt} = \beta v, \quad (3.34)$$

onde, por conveniência, usamos a constante $\beta := -b/m = -1/\tau$. A solução de (3.34) é simples de ser obtida e é dada por (3.29). No entanto, vamos usar (3.34) para apresentar um método de obter soluções, em geral apenas aproximadas, de certas equações diferenciais. Ele é chamado **método de aproximações sucessivas** ou **método de iteração**. Em princípio, ele se aplica a uma equação diferencial de primeira ordem, na qual a derivada da incógnita, digamos no membro esquerdo da equação, é dada por uma função da própria incógnita, no membro direito da equação. Em nosso caso a incógnita é a velocidade, e a função é a mais simples possível, uma constante vezes a incógnita. Começamos com a aproximação de ordem zero, que consiste em tomar a função velocidade incógnita como sendo a velocidade inicial v_0 . Denotando por $v^{(0)}$ essa aproximação inicial para a incógnita, obtemos $v^{(0)} = v_0$. Substituindo $v^{(0)}$ no membro direito de (3.34) e integrando, obtemos no membro esquerdo a aproximação de ordem 1 para a incógnita, que denotamos por $v^{(1)}$,

$$\frac{dv}{dt} = \beta v^{(0)} \implies v^{(1)} = v_0 + \beta v_0 t. \quad (3.35)$$

Agora, substituímos essa aproximação de ordem 1 no membro direito de (3.34) para obter no membro esquerdo a aproximação de ordem 2, que denotamos por $v^{(2)}$,

$$\frac{dv}{dt} = \beta v^{(1)} \implies v^{(2)} = v_0 + \beta v_0 t + \frac{1}{2} \beta^2 v_0 t^2. \quad (3.36)$$

Esse procedimento pode ser repetido para obter do membro esquerdo de (3.34) a aproximação de ordem $n+1$, pela substituição da aproximação de ordem n no membro direito. A qualidade de cada aproximação depende do valor de βt . Se βt é pequeno, i.e., $\beta t \ll 1$, então haverá alguma potência $(\beta t)^{n+1}$ que é desprezível; nesse caso, a aproximação de ordem n , que denotamos por $v^{(n)}$, será uma boa aproximação.

Uma maneira equivalente de descrever esse método de iteração consiste em começar por transformar (3.34) na seguinte equação integral

$$v(t) = v_0 + \beta \int_0^t dt_1 v(t_1). \quad (3.37)$$

na qual está incorporada a condição inicial $v(0) = v_0$ (note que estamos usando a notação $v(t) := \dot{\phi}(t)$). Agora, usamos a velocidade dada pelo membro direito da equação no integrando da própria equação, para obter

$$v(t) = v_0 + v_0 \beta t + \beta^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 v(t_2) \quad (3.38)$$

Repetindo n vezes o procedimento de substituir o membro direito da última equação obtida no seu próprio integrando, obtemos

$$v(t) = v_0 \sum_{k=0}^n \frac{(\beta t)^k}{k!} + \beta^{n+1} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} v(t_{n+1}). \quad (3.39)$$

Se βt é pequeno o bastante para que possamos considerar desprezível o último termo dessa equação, a soma que o antecede é a aproximação de ordem n para a função $v(t)$. No caso simples que estamos considerando, em que a solução exata é conhecida, (3.39) não é de utilidade. Em situações mais complicadas, entretanto, o método de iteração pode ser o último recurso disponível para obter alguma solução aproximada. Observemos também que, no caso em consideração podemos obter a solução exata a partir de (3.39). De fato, tomando-se o limite $n \rightarrow \infty$ nessa equação o termo contendo as integrais vai a zero e obtém-se a solução exata (3.29).

No problema da queda de uma partícula próxima à superfície da terra temos a força gravitacional $-mg$ e a força de atrito dependente da velocidade. Para velocidades não muito elevadas a força de atrito é bem aproximada por uma expressão proporcional à velocidade, como em (3.28). Nesse caso, a equação do movimento é

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - bv, \quad (3.40)$$

onde o eixo vertical do movimento foi escolhido apontando para cima. No caso de quedas com velocidades altas uma aproximação melhor para a força de atrito é dada por (3.26) com $n = 2$. A equação do movimento é, então,

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + bv^2, \quad (3.41)$$

onde, naturalmente, b representa uma constante diferente da que aparece em (3.40). Essas equações também podem ser resolvidas pelo uso de (3.23) e (3.25).

3.4 Força dependente apenas da posição

Quando uma força F depende apenas da posição x , o trabalho da força durante um movimento ϕ , desde um instante t_1 até um instante t_2 , depende apenas da posição inicial $x_1 = \phi(t_1)$ e da posição final $x_2 = \phi(t_2)$,

$$\int_{t_1(\phi)}^{t_2} dt F v = \int_{t_1(\phi)}^{t_2} \mathcal{F}(x) v dt = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x) dx. \quad (3.42)$$

Este trabalho é, portanto, uma função que depende apenas do par de posições (x_1, x_2) , e que denotaremos por W ,

$$W(x_1, x_2) := \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x) dx. \quad (3.43)$$

É importante enfatizar que o valor desse trabalho é determinado independentemente de se especificar um movimento de x_1 a x_2 . Portanto, o seu valor é o mesmo para o movimento real ou para qualquer movimento virtual que imaginarmos ocorrer entre x_1 e x_2 , *i.e.*, mesmo para movimentos que não são possíveis para a partícula sujeita a uma força total F . Na verdade, dada a força como função da posição x , e dois pontos x_1 e x_2 , podemos calcular o trabalho (3.43) sem fazer qualquer referencia a movimentos da partícula de x_1 e x_2 .

De (3.43) obtemos de imediato que $W(x, x) = 0$, $W(x_2, x_1) = -W(x_1, x_2)$ e $W(x_1, x_2) + W(x_2, x_3) = W(x_1, x_3)$. Na verdade, basta verificar a última propriedade,

$$W(x_1, x_2) + W(x_2, x_3) = W(x_1, x_3), \quad (3.44)$$

pois as outras duas são decorrências dela.

Se a força resultante F sobre a partícula depende apenas da posição da partícula, o teorema do trabalho e energia cinética em (3.13) pode ser escrito, com o auxílio de (3.42) e da definição (3.43), na seguinte forma

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W(x_1, x_2), \quad (3.45)$$

onde x_1 e x_2 são duas posições ocupadas pela partícula em seu movimento real, v_1 e v_2 são as velocidades respectivas nessas posições e, naturalmente, W é o trabalho realizado pela resultante no movimento da partícula de x_1 a x_2 . Fixando-se uma posição qualquer x_p na reta do movimento, que chamamos **posição padrão**, e usando a propriedade (3.44) da função W , podemos escrever $W(x_1, x_2) = W(x_1, x_p) + W(x_p, x_2)$ e pôr (3.45) na seguinte forma:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + W(x_2, x_p) = \frac{1}{2}mv_1^2 + W(x_1, x_p). \quad (3.46)$$

Essa equação é importante porque determina uma grandeza que depende das variáveis x e v do movimento, mas não muda durante o movimento, qual seja: a grandeza dada pela soma da energia cinética da partícula com o trabalho que a força resultante realizaria se a partícula fosse da posição em que se encontra até a posição padrão. Definimos **energia potencial** U de uma força F como sendo a função que associa a cada posição x o trabalho que a força realizaria sobre uma partícula que fosse de x até uma posição padrão x_p ,

$$U(x) = W(x, x_p) = \int_x^{x_p} \mathcal{F}(x') dx'. \quad (3.47)$$

É costume também denominar energia potencial o valor da função energia potencial.

Notemos que a energia potencial é uma grandeza associada à força que a vizinhança da partícula faz sobre ela, i.e., é uma grandeza associada ao sistema isolado constituído pela partícula e sua vizinhança; desse modo, $U(x)$ é melhor caracterizada dizendo que é a energia potencial do sistema, constituído pela partícula e vizinhança, quando a partícula está na posição x . Voltemos ao caso em que F é a resultante e usemos o conceito de energia potencial para escrever (3.46) na forma

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) = \frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1). \quad (3.48)$$

Essa equação afirma que, a cada instante durante o movimento de uma partícula, se a resultante sobre ela depende apenas da posição, a soma da energia cinética da partícula com a energia potencial da resultante é constante. Denominamos **energia mecânica** do sistema, constituído pela partícula e sua vizinhança, a soma das energias

cinética e potencial. A energia mecânica é, pois, uma função E da posição e velocidade da partícula,

$$E(x, v) := \frac{1}{2}mv^2 + U(x) . \quad (3.49)$$

O teorema (3.48), afirma que essa função mantém um valor constante se x e v são, respectivamente, posição e velocidade da partícula durante um movimento real. Durante dois movimentos reais da partícula a energia mecânica tem valores constantes que, contudo, não precisam ser iguais. O valor da energia mecânica também é denotado por E , de modo que podemos escrever $E(x, v) = E$.

Usando o conceito de energia mecânica, (3.48) pode ser escrita como

$$E(x, v) = E = \text{constante} . \quad (3.50)$$

Essa equação é chamada de **teorema da conservação da energia mecânica**. Uma grandeza que depende da posição e velocidade da partícula e que mantém um valor constante durante cada movimento real da partícula, é chamada **constante de movimento** ou **grandeza conservada**. Em um movimento unidimensional, uma força que depende apenas da posição é chamada **conservativa**. Portanto, o teorema da conservação da energia mecânica afirma que a energia mecânica é uma grandeza conservada se a força resultante é conservativa.

Temos, como consequência direta de (3.47), que:

$$\mathcal{F}(x) = -\frac{d}{dx}U(x) \quad (3.51)$$

Usando essa relação podemos obter a conservação da energia mecânica (3.50) diretamente da Segunda Lei de Newton, sem passar pelo conceito de trabalho. Reciprocamente, podemos obter a Segunda Lei de Newton a partir da conservação da energia mecânica, no caso em que a força resultante depende apenas da posição.

Notemos que a posição padrão usada na definição (3.47) de energia potencial é arbitrária, e que diferentes escolhas da posição padrão levam a diferentes energias potenciais associadas a uma mesma força; elas diferem entre si por uma constante aditiva que não afeta os resultados observáveis da teoria. A energia mecânica também é modificada por uma constante aditiva quando mudamos a posição padrão; não é portanto importante o seu valor, mas sim o fato de que permanece constante durante cada movimento real da partícula. Na verdade, podemos concluir que é possível adicionar qualquer constante à energia potencial sem alterar os resultados observáveis, *i.e.*, a força (3.51) e a conservação da energia (3.50).

Agora, suponhamos que a força resultante sobre a partícula possa ser escrita como uma soma $F + F'$, na qual F' é uma força arbitrária e F é uma força conservativa. Podemos, então, obter da Segunda Lei de Newton a seguinte equação

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}mv^2 + U(x) \right] = F'v , \quad (3.52)$$

onde U é a energia potencial associada à força conservativa F . Seja F a resultante de todas as forças conservativas sobre a partícula; nesse caso F' é a soma somente das

que não são conservativas. Fazemos uma nova definição de **energia mecânica** do sistema, constituído pela partícula e vizinhança, como a soma da energia cinética da partícula com a energia potencial associada à parte conservativa da força resultante, que denotamos por F . Na primeira definição de energia mecânica supúnhamos que a resultante era conservativa; agora aceitamos a possibilidade de que ela tenha uma parte não-conservativa F' . A nova definição de energia mecânica é mais geral e reduz-se à antiga definição quando $F' = 0$. Representando essa energia mecânica que acabamos de definir por E_{mec} , podemos escrever (3.52) na forma

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = F'v \quad (3.53)$$

e dizer que a taxa instantânea de variação da energia mecânica é a potência das forças não-conservativas. Quando F' é uma força de atrito, a potência é negativa e a energia mecânica decresce com o tempo.

Quando a força resultante F depende apenas da posição, a Segunda Lei de Newton apresenta invariância por inversão temporal, *i.e.*, não muda quando se troca a variável t , que representa o tempo, por $-t$. Como consequência, se ϕ é um movimento possível da partícula então o movimento ϕ_T definido por $\phi_T := \phi(-t)$ também é possível. A invariância ou não por inversão temporal é uma propriedade importante de qualquer lei da física.

Consideremos que a força resultante sobre a partícula é conservativa e, portanto, que a energia mecânica E é uma constante em cada movimento real. Podemos, então, usar o princípio da conservação da energia mecânica para determinar os movimentos possíveis da partícula. A partir de (3.49) e (3.50), obtemos

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}, \quad (3.54)$$

onde o sinal é tomado conforme o sentido em que a velocidade aponta no eixo do movimento. De (3.54) obtemos para o caso em que x_0 é a posição da partícula no instante t_0 ,

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}} = t - t_0 \quad (3.55)$$

Em intervalos apropriados, o membro esquerdo dessa equação define funções de x que podem ser invertidas para dar a função do movimento $x = \phi(t)$. Vemos que, também nesse caso, a solução do problema fundamental da mecânica fica reduzido a duas quadraturas, a de (3.47) e a de (3.55).

Muitas informações sobre o movimento unidimensional da partícula podem ser obtidas a partir da energia potencial U , sem que seja necessário resolver (3.55) para obter precisamente o movimento. Em primeiro lugar, temos que a expressão (3.49) sob a restrição (3.50) determina em que regiões da reta a partícula pode se mover. De fato, sendo a energia cinética uma grandeza não negativa, a partícula sómente pode ocupar uma posição x da reta na qual $U(x) \leq E$, *i.e.*, o conjunto de pontos acessíveis à partícula é $\{x \in \mathbb{R} \mid U(x) \leq E\}$. A energia mecânica E , por sua vez,

é determinada pelas condições iniciais; temos, então, o resultado intuitivo de que a energia potencial e as condições iniciais determinam as posições acessíveis à partícula. No ponto x em que $U(x) < E$ temos que $v \neq 0$, i.e., a partícula está em movimento, passando por x ; no ponto x em que $U(x) = E$ a partícula tem velocidade nula. Um ponto x em que $dU(x)/dx = 0$, i.e., em que $\mathcal{F}(x) = 0$, é dito ponto de equilíbrio. Se no ponto de equilíbrio o potencial tem um mínimo, i.e., se $d^2U(x)/dx^2 > 0$, o ponto é dito de **equilíbrio estável**; a porção do gráfico do potencial no qual ele cresce monótonamente, ao afastar-se de um mínimo, é chamado **poço de potencial**. Se no ponto de equilíbrio o potencial tem um máximo, i.e., se $d^2U(x)/dx^2 < 0$, o ponto é dito de **equilíbrio instável**; a porção do gráfico do potencial no qual ele decresce monótonamente ao afastar-se de um máximo, é chamado **barreira de potencial**.

Um ponto no qual $U(x) = E$ é chamado **ponto de retorno**, porque nele a partícula é obrigada a iniciar um movimento de retorno, caso ele não seja também um ponto de equilíbrio. Se a partícula se encontra entre dois pontos de retorno o movimento dela fica restrito a esse intervalo e é dito **finito**. Se o intervalo permitido é delimitado por apenas um ponto de retorno, ou não é delimitada por nenhum, o movimento é dito **infinito**. Se o movimento é infinito, a partícula pode deslocar-se para $x \rightarrow \pm\infty$; se em algum desses limites a partícula adquire uma velocidade constante dizemos que neste limite a partícula se encontra em um **estado assintótico**. Um movimento no qual a partícula passa de um estado assintótico para outro é chamado **espalhamento da partícula pela energia potencial**, ou pela força correspondente, que estiverem sendo consideradas.

Consideremos o movimento da partícula em um intervalo entre dois pontos de retorno x_1 e x_2 ($x_1 < x_2$), nenhum deles de equilíbrio, como, por exemplo, no poço de potencial $P_1P_mP_2$ da figura 3.1. Nesse caso, a partícula realiza um movimento

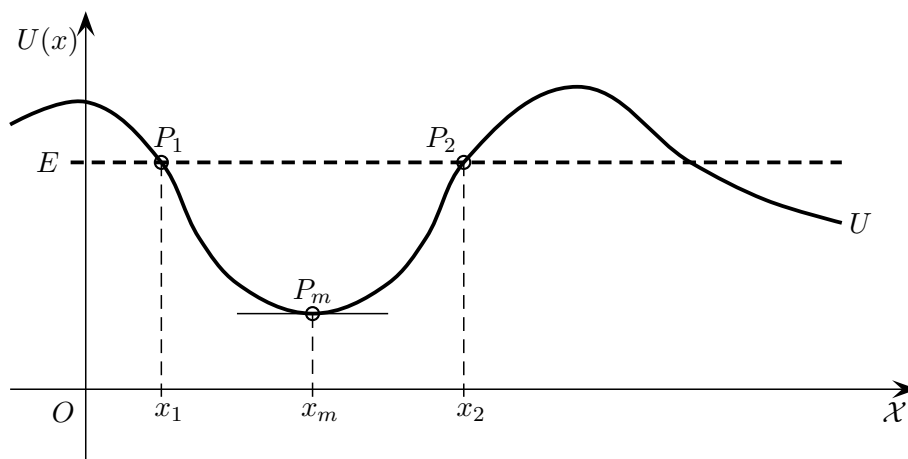


Figura 3.1: Partícula em poço de potencial $P_1P_mP_2$.

periódico de oscilação entre x_1 e x_2 . O tempo gasto pela partícula para ir de x_2 a x_1 é igual ao tempo gasto para ir de x_1 a x_2 . Desse modo, o período do movimento é o dobro do tempo gasto pela partícula para ir de x_1 a x_2 . Os pontos de retorno são

soluções da equação $U(x) = E$ e, portanto, são funções de E , que representaremos por $x_1(E)$ e $x_2(E)$ ($x_1(E) < x_2(E)$). Usando (3.55) concluímos que o período do movimento é função de E e é dado por:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (3.56)$$

Se a partícula oscila em torno de um ponto x_m de equilíbrio estável, podemos expandir $U(x)$ em série de Taylor em torno de x_m no intervalo de oscilação,

$$U(x) = U(x_m) + \frac{dU(x_m)}{dx}(x - x_m) + \frac{1}{2!} \frac{d^2U(x_m)}{dx^2}(x - x_m)^2 + \dots \quad (3.57)$$

Sendo x_m ponto de equilíbrio, temos que $dU(x_m)/dx = 0$; sendo equilíbrio estável, temos que a constante k , definida por

$$k := \frac{d^2U(x_m)}{dx^2}, \quad (3.58)$$

é positiva. Nada perdemos em generalidade supondo que o ponto padrão do potencial é em x_m . Desse modo, os três primeiros termos da série de Taylor em (3.57) reduzem-se ao termo $k(x - x_m)^2/2$. Supondo, finalmente, que $E - U(x_m)$ é pequena o bastante para que os demais termos da série de Taylor possam ser desprezados, obtemos a seguinte expressão aproximada do potencial

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_m)^2, \quad (3.59)$$

e a seguinte expressão aproximada para a força sobre a partícula nas proximidades de x_m

$$\mathcal{F}(x) = -k(x - x_m). \quad (3.60)$$

Essa força é chamada **restauradora**, ou **elástica**, pois, devido à sua propriedade expressa pelo sinal menos, ela puxa sempre a partícula de volta à posição de equilíbrio. Ela é dita **linear**, por ser proporcional à variável $x - x_m$, que é chamada **elongação**; a constante de proporcionalidade k é chamada **constante elástica** da força. A substituição da força pela expressão aproximada (3.60) é muitas vezes chamada **linearização** do problema em consideração. A partícula em um potencial (3.59), i.e., sob a ação de uma resultante restauradora linear, é chamada **oscilador harmônico simples**. O seus movimentos possíveis podem ser facilmente obtidos substituindo-se (3.59) em (3.55). Escolhendo-se o eixo do movimento de tal modo que $x_m = 0$, obtemos

$$x = A \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (3.61)$$

onde

$$A := \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad (3.62)$$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.63)$$

e θ_0 , do mesmo modo que A , é uma constante de integração fixada pela condição inicial. Denominamos (3.61) **movimento harmônico simples**, por ser descrito pelas funções seno e cosseno, conhecidas como funções harmônicas simples. A constante A é chamada **amplitude** do movimento e é igual ao deslocamento máximo da partícula à direita e à esquerda do ponto de equilíbrio; ela depende da condição inicial por intermédio de E . A constante ω_0 é a **frequência angular** do movimento e depende somente das características do oscilador em consideração, quais sejam, da massa da partícula e da constante elástica da força. Da frequência angular obtemos que o período T do movimento,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\omega}{k}}, \quad (3.64)$$

resultado esse em acordo com o obtido a partir de (3.56). O período do oscilador harmônico simples tem a propriedade notável de não depender da energia E , i.e., da amplitude A de oscilação. As constantes A e θ_0 relacionam-se com a posição inicial x_0 e a velocidade inicial v_0 , no instante inicial $t_0 = 0$, por meio de

$$x_0 = A \sin \theta_0, \quad e \quad v_0 = \omega_0 A \cos \theta_0. \quad (3.65)$$

Usando essas expressões em (3.61) obtemos o movimento como função das condições inicial,

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (3.66)$$

Evidentemente, essa expressão determina o movimento da partícula associado a qualquer condição inicial; ela é a função-movimento associada à condição inicial arbitrária $x = x_0$ e $\dot{x} = v_0$ em $t = 0$. Portanto, (3.66) dá todos os movimentos possíveis da partícula e, por essa razão, é chamada a **solução geral** do problema, i.e., da equação diferencial do movimento. Naturalmente, essa solução geral também pode ser escrita na forma (3.61). Dado que as condições iniciais são dadas por uma posição e uma velocidade, com valores arbitrários, para termos uma solução geral é necessário que ela contenha duas constantes arbitrárias e que consiga satisfazer às condições iniciais arbitrárias escolhendo valores convenientes para as constantes. Demonstramos que isso é possível expressando as constantes em termos das condições iniciais. É nesse caso que dizemos que a solução obtida é geral. Portanto, a solução geral é da forma $x = \Phi(C_1, C_2; t)$ onde a função Φ é tal que podemos obter C_1 e C_2 a partir das equações $x_0 = \Phi(C_1, C_2; t_0)$ e $v_0 = \dot{\Phi}(C_1, C_2; t_0)$, nas quais x_0 e v_0 são valores arbitrários de posição e velocidade no instante inicial t_0 . Nesse caso, dizemos que $x = \Phi(0, 1; t)$ e $x = \Phi(1, 0; t)$ são duas soluções independentes da equação diferencial de movimento.

3.5 Oscilador harmônico amortecido

Passaremos agora a um caso em que a força depende da posição e da velocidade da partícula, de modo não trivial mas bem simples, em que são lineares ambas dependências. Vamos fixar-nos na situação concreta de maior interesse, na qual a força depende da posição como uma força restauradora linear e da velocidade como uma força de atrito linear.

A Segunda Lei de Newton tem neste caso a forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + \mathcal{F}(t), \quad (3.67)$$

onde k é a constante elástica da força restauradora, b é a constante positiva característica do atrito ou viscosidade, e $\mathcal{F}(t)$ é uma força prescrita que compõe a resultante. Nesta seção, consideramos o caso em que $\mathcal{F}(t)$ é nula. Temos, então, que (3.67) reduz-se à seguinte equação diferencial homogênea de coeficientes constantes:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (3.68)$$

onde m , b e k são os coeficientes constantes da equação. Uma partícula cujo movimento é regido pela equação (3.68) é chamada **oscilador harmônico amortecido**, sendo b a constante que caracteriza o amortecimento. No limite em que $b \rightarrow 0$ o amortecimento desaparece e o oscilador harmônico amortecido torna-se um oscilador harmônico simples.

O cancelamento entre uma função e suas derivadas, expresso pela equação (3.68), sugere soluções do tipo exponencial,

$$x = e^{pt}. \quad (3.69)$$

Substituindo tal função em (3.68) vemos que ela é solução se, e somente se,

$$mp^2 + bp + k = 0, \quad (3.70)$$

i.e., se, e somente se,

$$p = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (3.71)$$

Temos que k/m é a frequência ω_0 do oscilador sem amortecimento, definida em (3.63). Ela também é chamada **frequência natural** do oscilador, entendendo-se com isso que é a frequência com que oscilaria se não houvesse amortecimento nem força prescrita. A constante

$$\gamma := \frac{b}{2m} \quad (3.72)$$

é chamada **coeficiente de amortecimento**. Escrevemos, então, as raízes (3.71) como

$$p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (3.73)$$

O sinal do discriminante nos leva a distinguir três casos: (a) $\gamma < \omega_0$, (b) $\gamma > \omega_0$ e (c) $\gamma = \omega_0$.

No caso (a), em que $\gamma < \omega_0$, definimos a quantidade real positiva

$$\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (3.74)$$

de modo que as raízes (3.73) sejam dadas por

$$p = -\gamma \pm i\omega_1. \quad (3.75)$$

Sendo (3.68) linear, temos para ela a seguinte solução:

$$x = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + \tilde{A}_2 e^{-\gamma t - i\omega_1 t}, \quad (3.76)$$

onde \tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 são duas constantes arbitrárias. Escrevendo-as como $\tilde{A}_1 = Ae^{i\theta_0}/2$ e $\tilde{A}_2 = Ae^{-i\theta_0}/2$, (3.76) assume a forma:

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta_0). \quad (3.77)$$

No limite em que $\gamma \rightarrow 0$, obtemos de (3.74) que $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ e esse movimento torna-se harmônico simples com frequência ω_0 . O movimento (3.77) é dado pelo produto da exponencial de amortecimento $e^{-\gamma t}$ pela função $A \cos(\omega_1 t + \theta_0)$. Essa função representa um movimento harmônico simples com frequência ω_1 menor do que a frequência sem amortecimento ω_0 . Dizemos que (3.77) é uma oscilação harmônica de frequência ω_1 com uma amplitude $Ae^{-\gamma t}$ que decai exponencialmente com o tempo. A amplitude e a fase inicial θ_0 são dadas pelas condições iniciais, a posição x_0 e a velocidade v_0 no instante $t_o = 0$,

$$A \cos \theta_0 = x_0 \quad \text{e} \quad A \sin \theta_0 = -\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1}. \quad (3.78)$$

A solução (3.77) também pode ser escrita na forma

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad (3.79)$$

que é conveniente para escrever a solução como função das condições iniciais,

$$x = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right). \quad (3.80)$$

Portanto, no caso em que $\gamma < \omega_0$, a solução geral da equação diferencial de movimento (3.68) é dada por (3.80) ou, se preferirmos, por (3.77).

A razão entre as amplitudes da oscilação amortecida em dois máximos sucessivos é chamada **decremento** do movimento e é facilmente obtida de (3.77),

$$\frac{Ae^{\gamma t_M}}{Ae^{\gamma(t_M+T_1)}} = e^{-2\pi\gamma/\omega_1}, \quad (3.81)$$

onde t_M é o instante de ocorrência de um máximo e T_1 é o período de ocorrência de máximos, $T_1 := 2\pi/\omega_1$. A quantidade $2\pi\gamma/\omega_1$ é chamada **decremento logarítmico** do movimento.

A energia mecânica do oscilador não é conservada, devido à força de atrito $-bv$. Temos

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -bv^2. \quad (3.82)$$

Devido ao fato de que b é positivo, temos forçosamente a diminuição da energia mecânica pela presença do atrito. Usando (3.77), obtemos para a energia mecânica,

$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_1 t + \theta_0) \left\{ 1 + \left[\frac{\gamma}{\omega_0} + \frac{\omega_1}{\omega_0} \tan(\omega_1 t + \theta_0) \right]^2 \right\}, \quad (3.83)$$

cujo valor inicial em $t_0 = 0$ é

$$E_0 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \theta_0 \left[1 + \left(\frac{\gamma}{\omega_0} + \frac{\omega_1}{\omega_0} \tan \theta_0 \right)^2 \right]. \quad (3.84)$$

Observemos que o fator exponencial de dissipação da energia mecânica, $e^{-2\gamma t}$, é o **quadrado** do fator exponencial de decaimento da amplitude do movimento. No caso importante de pequeno amortecimento, $\gamma \ll \omega_0$, temos que $\gamma/\omega_0 \approx 0$, $\omega_1 \approx \omega_0$, $E_0 \approx kA^2/2$ e obtemos para (3.83) a expressão aproximada

$$E_{mec} \approx \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t} \approx E_0 e^{-2\gamma t}. \quad (3.85)$$

No intervalo de tempo de uma oscilação amortecida, $T_1 = 2\pi/\omega_1$, a energia mecânica cai por um fator igual ao quadrado do decremento. A taxa fracional de decréscimo da energia, i.e., sua derivada logaritmica, é obtida de (3.85) e é dada por

$$\frac{1}{E_{mec}} \frac{dE_{mec}}{dt} = \frac{d}{dt} \log E_{mec} = -2\gamma. \quad (3.86)$$

Agora, passemos ao caso (b), no qual $\gamma > \omega_0$. Nesse caso, as duas raízes em (3.73) são dadas por $p = -\gamma_1$ e $p = \gamma_2$, onde

$$\gamma_1 := \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \text{e} \quad \gamma_2 := \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (3.87)$$

Obviamente, γ_1 e γ_2 são reais positivos e $\gamma_1 > \gamma_2$. Nesse caso, a seguinte solução de (3.68):

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}, \quad (3.88)$$

onde C_1 e C_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais,

$$x_0 = C_1 + C_2 \quad \text{e} \quad v_0 = -\gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2. \quad (3.89)$$

Portanto, temos

$$x = \frac{v_0 + \gamma_1 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_2 t} - \frac{v_0 + \gamma_2 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1 t}, \quad (3.90)$$

que é a solução geral do problema no caso em que $\gamma > \omega_0$. Em (3.90), a posição é a soma de dois termos que decaem exponencialmente, tendo o segundo um decaimento mais rápido que o primeiro.

Finalmente, no caso (c), em que $\gamma = \omega_0$, (3.73) fornece uma única raiz $p = -\gamma$ e obtemos a solução $e^{-\gamma t}$. Para construir uma solução geral precisamos de outra solução independente. Vamos procurá-la no limite de (3.90) quando γ_1 e γ_2 tendem a ω_0 . Considerando em (3.90) o caso mais simples em que $x_0 = 0$, e tomando o dito limite, obtemos que $x \rightarrow v_0 t e^{-\gamma t}$. Substituindo $t e^{-\gamma t}$ em na equação diferencial (3.68) vemos que, de fato, $t e^{-\gamma t}$ é uma solução da equação no caso $\gamma = \omega_0$. No caso (c) temos, portanto, a solução

$$x = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}, \quad (3.91)$$

onde C_1 e C_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais,

$$x_0 = C_1 \quad \text{e} \quad v_0 = C_2 - \gamma C_1 . \quad (3.92)$$

Portanto,

$$x = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t]e^{-\gamma t} \quad (3.93)$$

é a solução geral no caso $\gamma = \omega_0$. Notemos que ela pode ser obtida diretamente da solução (3.90) do caso $\gamma > \omega_0$ no limite em que $\gamma = \omega_0$.

Temos, em geral,

$$\gamma_1 > \gamma_C > \gamma_2 , \quad (3.94)$$

onde γ_C é o valor crítico que γ_1 e γ_2 assumem no limite em que $\gamma \rightarrow \omega_0$. Uma vez que $\gamma_C = \omega_0$ temos que o decaimento da solução (3.93) é mais rápido do que o da solução (3.90), exceto na situação especialíssima em que as condições iniciais satisfazem à condição que anula o primeiro termo de (3.90), qual seja: $(v_0/x_0) = -\gamma_1$.

O oscilador amortecido no caso $\gamma < \omega_0$ é chamado **subamortecido**, no caso $\gamma > \omega_0$, **superamortecido** e no caso $\gamma = \omega_0$, **críticamente amortecimento**.

3.6 Oscilador harmônico forçado

Uma partícula sujeita a uma força prescrita, além de uma força restauradora linear e uma força de atrito linear, é chamada **oscilador harmônico forçado**; entende-se que seja forçado pela força prescrita, que denotaremos por F . Nesse caso, a equação de movimento da partícula é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = \mathcal{F}(t) , \quad (3.95)$$

onde \mathcal{F} é a função-força prescrita, $F = \mathcal{F}(t)$. A equação (3.68), que corresponde ao caso $F = 0$, é chamada **equação homogênea associada** à equação (3.95); essa, por sua vez, é uma equação dita **inomogênea**, porque nela há um termo independente da incógnita x , no caso, o termo dado pela força prescrita. Como sabemos, a solução geral da homogênea associada contém duas constantes arbitrárias. A solução geral da equação inomogênea é dada pela soma de alguma de suas soluções particulares com a solução geral da homogênea associada. Desse modo, a solução geral da inomogênea tem duas constantes arbitrárias que, em cada caso particular, são fixadas pelas condições iniciais. Dada uma força prescrita F , o problema do oscilador harmônico forçado fica reduzido a encontrar alguma solução particular de (3.95), pois a solução geral da homogênea associada já foi obtida na seção anterior. Consideraremos dois exemplos de suma importância, o da força prescrita harmônica (3.17) e o da força prescrita dita percussiva.

No primeiro exemplo, consideramos a força prescrita harmônica (3.17),

$$F = \mathcal{F}(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta_0) , \quad (3.96)$$

que substituída em (3.95) nos dá a seguinte equação diferencial de movimento

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t + \theta_0) . \quad (3.97)$$

Vamos escrever a força prescrita harmônica na forma

$$\mathcal{F}(t) = \Re \tilde{\mathcal{F}}(t) = \Re \tilde{F}_0 e^{i\omega t} , \quad (3.98)$$

onde usamos as seguintes definições

$$\tilde{F}_0 := F_0 e^{i\theta_0} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{F}}(t) := \tilde{F}_0 e^{i\omega t} . \quad (3.99)$$

Seja \tilde{x} uma função complexa de t que satisfaz à equação

$$m \frac{d^2 \tilde{x}(t)}{dt^2} + b \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + k\tilde{x}(t) = \tilde{F}_0 e^{i\omega t} . \quad (3.100)$$

Nesse caso, $\Re \tilde{x}$ é uma solução de (3.95). Vamos usar essa propriedade para obter uma solução particular de (3.95).

É natural procurar uma solução exponencial para a equação diferencial (3.100). Substituindo nela a função

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t} , \quad (3.101)$$

onde \tilde{x}_0 é uma constante complexa e ω é a mesma frequência da força prescrita (3.98), obtemos que $\tilde{x}(t)$ é solução de (3.100) se, e somente se,

$$\tilde{x}_0 = \frac{\tilde{F}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} e^{i\omega t} , \quad (3.102)$$

onde estamos usando as definições (3.63) e (3.72) de ω_0 e γ . Antes de tomar a parte real dessa solução complexa, é conveniente escrever a fração $1/(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)$ na forma polar

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} , \quad (3.103)$$

onde, obviamente, φ é a fase da fração, que é obtida pela comparação das partes real e imaginária dessa equação (3.103); temos

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad \text{e} \quad \sin \varphi = \frac{-2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} . \quad (3.104)$$

Substituindo (3.103) em (3.102), e explicitando a fase de \tilde{F}_0 , obtemos

$$\tilde{x}(t) = \frac{F_0 e^{i(\omega t + \theta_0 + \varphi)}}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} . \quad (3.105)$$

Observemos que ao variar a frequência ω da força de 0 a ∞ , a fase φ , dada por (3.104), varia de 0 a $-\pi$, sendo que $\varphi = -\pi/2$ quando $\omega = \omega_0$. Por conveniência, definimos a fase $\beta := \varphi + \pi/2$; com isso, temos β variando no intervalo simétrico de $-\pi/2$ a $\pi/2$ quando ω varia de 0 a ∞ , sendo que β tem o valor central 0 quando ω assume o valor da frequência natural ω_0 . Substituindo $\varphi = \beta - \pi/2$ em (3.105), obtemos

$$\tilde{x}(t) = \frac{F_0 e^{i(\omega t + \theta_0 + \beta)}}{im \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad (3.106)$$

onde a fase β é determinada por meio de (3.104), *i.e.*, por

$$\sin \beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \text{e} \quad \cos \beta = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \quad (3.107)$$

Finalmente, tomando a parte real de (3.106) obtemos para (3.97) a seguinte solução particular:

$$x_p(t) = \frac{F_0 \sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad (3.108)$$

onde a fase β é dada por (3.107), que é equivalente a

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.109)$$

As equações (3.108) e (3.109) nos fornecem a solução procurada; ela satisfaz a uma particularíssima condição inicial, que não é de importância em nosso estudo. A solução depende da massa m da partícula, da constante da força elástica, por meio da frequência natural ω_0 , da constante γ da força de atrito, da amplitude, frequência e fase inicial da força prescrita, respectivamente, F_0 , ω e θ_0 e, finalmente, da fase β que, por sua vez depende das forças elástica, de atrito e prescrita, por intermédio de ω_0 , γ , ω .

Portanto, temos a seguinte solução geral de (3.97):

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (3.110)$$

onde $x_p(t)$ é dada por (3.108) e $x_h(t)$ é a solução geral dependente de duas constantes arbitrárias, dada por (3.79), (3.88) ou (3.91), conforme tenhamos $\gamma < \omega_0$, $\gamma > \omega_0$ ou $\gamma = \omega_0$, respectivamente. As duas constantes arbitrárias presentes em $x_h(t)$ podem ser escolhidas de modo que $x(t)$ satisfaça qualquer condição inicial que for exigida. Devemos notar, entretanto, que a parte da solução $x(t)$ dada por $x_h(t)$ é evanescente; quando $t \gg \gamma^{-1}$, $x_h(t)$ torna-se desprezível e $x(t)$ reduz-se a $x_p(t)$. Dizemos que o oscilador atingiu o **regime** ou **estado estacionário**. Antes de atingir o regime estacionário, o oscilador encontra-se em um estado de movimento que chamamos **regime** ou **estado transiente**. As condições iniciais só influem no regime transiente; no sistema em regime estacionário não é possível identificar quais foram as condições iniciais do movimento.

Fixemos nossa atenção na solução (3.108) do regime estacionário; ela é da forma

$$x_p(t) = A \sin(\omega t + \theta_0 + \beta), \quad (3.111)$$

onde

$$A := \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (3.112)$$

A oscilação (3.111) no regime estacionário se processa com a mesma frequência ω da força prescrita em (3.97), porém defasada de $\beta - \pi/2$. De acordo com (3.109), essa defasagem depende da frequência natural de oscilação ω_0 , da frequência ω da força prescrita e do coeficiente de amortecimento γ . A amplitude (3.112) da oscilação depende dessas grandezas e da razão F_0/m . Essa amplitude é máxima quando a frequência ω da força aplicada é igual a

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad (3.113)$$

que é chamada **freqüência de ressonância da amplitude**. O máximo só existe se $\gamma^2 < \omega_0^2/2$ e, nesse caso, seu valor é dado por $F_0/(2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})$. O máximo é tanto maior quanto menor for o coeficiente de amortecimento γ . Para descrever a intensidade do amortecimento, define-se

$$Q := \frac{\omega_A}{2\gamma}, \quad (3.114)$$

que é chamado **fator de qualidade** do oscilador.

A potência fornecida para o oscilador é $P(t) = \mathcal{F}(t)\dot{x}_p(t)$. Substituindo nessa fórmula a expressão (3.96) da força harmônica e a derivada da posição (3.108), obtemos

$$P(t) = \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega \cos \beta \cos^2(\omega t + \theta_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \frac{F_0^2}{2m} \frac{\omega \sin \beta \sin^2(\omega t + \theta_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (3.115)$$

A quantidade de importância prática não é essa potência instantânea, mas a potência que a força prescrita efetivamente fornece ao oscilador em cada ciclo; é conveniente medi-la por meio da potência média em um ciclo,

$$\langle P \rangle := \frac{\int_0^{2\pi/\omega} P(t) dt}{\int_0^{2\pi/\omega} dt}. \quad (3.116)$$

Substituindo (3.115) nesta fórmula, encontramos

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2 \cos \beta}{2m} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad (3.117)$$

ou:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F_0 \dot{x}_{max} \cos \beta, \quad (3.118)$$

onde \dot{x}_{max} é o valor máximo da velocidade. O fator $\cos \beta$ que aparece em (3.117) e (3.118) é chamado **fator de potência** do oscilador forçado.

Usando na equação (3.117) a expressão do cosseno de β em (3.107), podemos escrever a potência média como

$$\langle P \rangle = \frac{F_0}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (3.119)$$

A potência média transmitida é máxima quando a força prescrita tem frequência ω igual a

$$\omega_P := \omega_0, \quad (3.120)$$

que é chamada **frequência de ressonância** do oscilador; ela é a frequência natural de oscilação simples, *i.e.*, sem amortecimento. Em ressonância, a potência transmitida é

$$\langle P \rangle_{max} = \frac{F_0^2}{4m\gamma}. \quad (3.121)$$

Quando o amortecimento é pequeno, *i.e.*, $\gamma \ll \omega_0$, o máximo da potência média é acentuado e ela tem valores significativos somente para ω próxima à frequência de ressonância ω_0 , como é fácil ver em (3.119). Para ω próxima a ω_0 , *i.e.*, $|\omega - \omega_0|/\omega_0 \ll 1$, podemos fazer as aproximações

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_0 \left(2 + \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) (\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0), \quad (3.122)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} \right) \approx \omega_0^2 \left(1 - 2\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) \approx \omega_0^2 \quad (3.123)$$

e obter as seguintes fórmulas aproximadas, para a potência média em (3.119),

$$\langle P \rangle \approx \frac{F_0^2}{4m} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \quad (3.124)$$

e para a defasagem β em (3.107),

$$\sin \beta \approx \frac{-(\omega - \omega_0)}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}} \quad \text{e} \quad \cos \beta \approx \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}. \quad (3.125)$$

O gráfico da potência média dada por (3.124) cai rapidamente quando ω se distancia do máximo $F_0^2/4m\gamma$, em $\omega = \omega_0$. Em $\omega = \omega_0 \pm \gamma$ a potência média tem valor igual à metade de seu valor máximo; isso significa, no caso em que $\gamma \ll \omega_0$, que o gráfico de $\langle P \rangle$ dado por (3.124) tem a forma de um pico estreito em torno de ω_0 , que chamamos **pico de ressonância estreita**; do próprio oscilador que apresenta esse pico para a potência se diz que está em **ressonância estreita**. A largura do pico na metade de seu máximo é 2γ e esse valor é chamado **semi-largura** do pico de ressonância. De (3.125) obtemos como aproximação de (3.109)

$$\beta \approx \arctg \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma} \quad (3.126)$$

Em $\omega = \omega_0$ temos $\beta \approx 0$. Mas se ω se afasta de ω_0 , para menos ou para mais, β tende rapidamente para $\pi/2$ e $-\pi/2$, respectivamente, pois γ é considerado pequeno. Portanto, em ressonância estreita, a defasagem β entre o deslocamento x e a força aplicada F varia rapidamente em torno da frequência de ressonância ω_0 . Em ressonância estreita o deslocamento (3.108) é dado pela fórmula aproximada

$$x_p(t) \approx \frac{F_0}{2m\omega_0} \frac{\sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}} \quad (3.127)$$

O quadrado da amplitude desse deslocamento tem um gráfico semelhante ao da potência.

No caso geral, em que o amortecimento não é pequeno, não ocorre ressonância estreita. Ainda assim, a potência média tem um máximo em $\omega = \omega_0$. Para ω suficientemente próxima de ω_0 (3.124) ainda pode servir de aproximação para (3.119), mas agora os valores da potência média longe do máximo também podem ser significativos. Também o deslocamento (3.108) pode ser aproximado por (3.127) se ω for suficientemente próxima de ω_0 . Examinemos o comportamento do deslocamento (3.108) para ω afastado de ω_0 . Se $\omega \ll \omega_0$ temos $\beta \approx \pi/2$, em virtude de (3.109) e obtemos para (3.108)

$$x_p(t) \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t + \theta_0) = \frac{\mathcal{F}(t)}{k}, \quad (3.128)$$

cujo significado intuitivo é imediato após alguns instantes de reflexão. Em contrapartida, se $\omega \gg \omega_0$, obtemos de (3.108) e (3.109), respectivamente,

$$x_p(t) \approx \frac{F_0}{m\omega^2} \frac{\sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{1 + (2\gamma/\omega)^2}} \quad \text{e} \quad \beta = -\arctg \frac{\omega}{2\gamma}. \quad (3.129)$$

Além disso, supondo $\omega \gg \gamma$, obtemos dessas equações a aproximação

$$x_p(t) \approx -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta_0) = -\frac{\mathcal{F}(t)}{m\omega^2}. \quad (3.130)$$

Este é o movimento obtido em (3.20), quando a única força que age na partícula é a prescrita $\mathcal{F}(t)$. Esse resultado não é surpreendente, pois as aproximações $\omega \gg \omega_0$ e $\omega \gg \gamma$ significam que em (3.97) tanto a força restauradora quanto a força de atrito são desprezíveis diante de $m\ddot{x}$.

Finalmente, notemos algumas características importantes das duas aproximações (3.128) e (3.130), obtidas para força prescrita de frequência muito baixa ou muito alta, respectivamente, comparada à frequência natural do oscilador. Se a frequência for muito baixa, a partícula oscila com a mesma frequência e fase da força prescrita. Nesse caso, a amplitude da oscilação não depende dessa frequência, mas é dada pela razão entre o máximo da força prescrita e o produto da massa da partícula pelo quadrado de sua frequência natural. Em contrapartida, se a frequência for muito alta, a partícula oscila também com a mesma frequência da força prescrita, mas em oposição de fase. Nesse caso, a amplitude da oscilação da partícula decai com o quadrado dessa frequência, *i.e.*, a partícula praticamente não se afasta de sua posição de equilíbrio se a frequência da força prescrita for muito alta.

No caso limite em que $\omega = 0$ a força prescrita não é mais oscilatória e reduz-se à constante $F_0 \cos \theta_0$. Nesse caso, uma solução particular de (3.97) é dada pela constante

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos \theta_0. \quad (3.131)$$

Passemos agora ao segundo exemplo de força prescrita, conhecida alternativamente como força impulsiva, força percussiva ou força de impacto. Uma **força percussiva** é

uma força que é diferente de zero somente durante um intervalo de tempo considerado muito pequeno em um dado problema, mas que nesse intervalo fornece um impulso significativo. Seja F a força percussiva, \mathcal{F} a sua função-força, e $[t_0; t_0 + \tau]$ o intervalo de tempo no qual F é diferente de zero, sendo τ positivo e muito pequeno no problema em consideração; dizemos que a força percussiva age no intervalo $[t_0; t_0 + \tau]$ e que ela tem duração τ . Seja Δp a variação do momento linear da partícula no intervalo $[t_0; t_0 + \tau]$,

$$\Delta p = p(t_0 + \tau) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathcal{F}(t) dt . \quad (3.132)$$

Nesse intervalo de tempo, a variação da velocidade é $\Delta v = \Delta p/m$ e a variação da posição Δx é tal que $|\Delta x| \leq (|v(t_0)| + |\Delta v|)\tau$. Portanto, durante o impulso, uma força percussiva muda significativamente a velocidade da partícula sem praticamente mudar a sua posição. Podemos chamar **movimento percussivo** àquele que exibe essa propriedade, em um pequeno intervalo de tempo sofre uma variação significativa de velocidade com uma variação insignificante de posição. Em geral, não conhecemos a forma exata da força percussiva, pois ela age em um intervalo de tempo muito curto, em que observações e medições são difíceis, mas podemos conhecer o seu efeito, o momento linear Δp ganho pela partícula. Consequentemente, o movimento durante a percussão é geralmente desconhecido, mas ao final da percussão sabemos que a partícula ganhou um momento linear Δp sem praticamente mudar de posição. Posteriormente, consideraremos a situação idealizada em que a duração da força percussiva vai a zero sem alterar o impulso Δp que ela transmite.

Fora do intervalo em que age a força percussiva, é fácil encontrar uma solução particular aproximada da equação de movimento, caso seja conhecida a solução geral da homogênea associada. Vamos ilustrar o método de encontrar essa solução considerando a equação de movimento

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = \mathcal{F}(t) , \quad (3.133)$$

na qual $\mathcal{F}(t)$ é a força percussiva. Qualquer solução particular serve para nosso propósito, de somá-la à solução geral da equação homogênea associada (3.68) para obter a solução geral da equação inhomogênea (3.133). Já que serve qualquer solução particular, vamos escolher uma com condição inicial bem simples, qual seja, posição e velocidade nulas no instante que chamaremos inicial. Também por simplicidade, esse instante inicial será anterior ao instante t_0 , em que a força percussiva começa a agir, mas tão próximo de t_0 quanto se queira; usamos para um tal instante inicial a notação $t_0 - 0$, que é usual no cálculo infinitesimal para representar $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_0 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Portanto, a condição inicial para a solução particular, que denotamos por x_p , é

$$x_p(t_0 - 0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}_p(t_0 - 0) = 0 . \quad (3.134)$$

No intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$ a força percussiva transmite à partícula um momento Δp , sem praticamente mudar sua posição, de modo que em um instante imediatamente posterior a $t_0 + \tau$, que denotamos por $t_0 + \tau + 0$, temos a condição

$$x_p(t_0 + \tau + 0) \approx 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}_p(t_0 + \tau + 0) = \frac{\Delta p}{m} . \quad (3.135)$$

Notemos, com atenção, o caráter aproximado da condição sobre a posição, ela permaneceu apenas aproximadamente a mesma que em (3.134). Por esse caráter aproximado, a solução particular que iremos encontrar, também será apenas aproximada.

Para encontrar a solução particular de (3.133), vamos aproveitar o fato de que a força percussiva é nula fora do intervalo de tempo $[t_0, t_0 + \tau]$. Por isso, fora desse intervalo a equação (3.133) é homogênea,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (t < t_0 \text{ ou } t > t_0 + \tau). \quad (3.136)$$

Uma vez que, por hipótese, sabemos a solução geral dessa equação homogênea, podemos determinar a solução particular em qualquer instante fora do intervalo $[t_0; t_0 + \tau]$. Vamos denotar por $x_{h<}(t)$ a solução da equação homogênea (3.136) para $t < t_0$, *i.e.*, a solução que satisfaz à condição inicial (3.134), e por $x_{h>}(t)$ a solução para $t > t_0 + \tau$, *i.e.*, a solução que satisfaz à condição inicial (3.135). Para $t < t_0$, a condição (3.134) e a unicidade da solução de (3.136) nos fornecem a solução identicamente nula, $x_{h<}(t) = 0$ ($t < t_0$). Para $t > t_0 + \tau$, a solução $x_{h>}(t)$ de (3.136) também é, por hipótese, conhecida. Ela depende do impulso da força percussiva por intermédio da condição inicial aproximada (3.135) que ela satisfaz. Portanto, a solução aproximada particular da inhomogênea, fora do intervalo $[t_0; t_0 + \tau]$, é da forma

$$x_p(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0, \\ x_{h>}(t) & \text{se } t > t_0 + \tau. \end{cases} \quad (3.137)$$

No caso em que o oscilador é subamortecido é fácil verificar que essa solução é dada por

$$x_p(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0, \\ (\Delta p / m\omega_1) e^{-\gamma(t-t_0-\tau)} \sin \omega_1(t-t_0-\tau) & \text{se } t > t_0 + \tau. \end{cases} \quad (3.138)$$

Naturalmente, essa expressão é obtida impondo a condição inicial (3.135) à solução geral (3.77) no caso subamortecido.

Passemos agora à situação idealizada definida pelo limite em que a duração τ da força percussiva vai a zero, sem contudo alterar o impulso Δp que ela transmite. Nessa situação limite a duração τ da força percussiva não é apenas muito pequena, mas nula; temos, então, que todo o impulso Δp é transmitido instantaneamente à partícula, no instante t_0 . Tomamos esse limite para que a solução (3.137), aproximada e válida apenas fora do intervalo $[t_0; t_0 + \tau]$, torne-se uma solução exata e válida em qualquer instante. Com efeito, ao tomarmos o limite $\tau \rightarrow 0$ obtemos, primeiramente, que a solução (3.137) passa a descrever o movimento da partícula para $t < t_0$ e $t > t_0$; além disso, pela continuidade da posição, também sabemos o valor da solução em $t = t_0$, qual seja $x_p(t_0) = 0$. Nesse limite também temos que $x_p(t_0 + \tau + 0)$ tende a $x_p(t_0 + 0)$, que é o limite à direita para a posição da partícula no instante t_0 . A continuidade da posição determina que esse limite é igual a $x_p(t_0 - 0)$, o limite à esquerda para a posição da partícula no instante t_0 , *i.e.*, $x_p(t_0 + 0) = x_p(t_0 - 0)$. Mas, de acordo com (3.134), $x_p(t_0 - 0) = 0$ e, conseqüentemente, $x_p(t_0 + 0) = 0$. Portanto, no limite $\tau \rightarrow 0$ a primeira condição aproximada em (3.135) torna-se exata. Conseqüentemente,

a solução particular (3.137) também torna-se exata. Portanto, obtemos a seguinte solução particular da inhomogênea (3.133),

$$x_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0, \\ \lim x_{h>}(t) & \text{se } t \geq t_0, \end{cases} \quad (3.139)$$

na qual o limite de $x_{h>}(t)$ é o de $\tau \rightarrow 0$ com Δp mantido constante. Notemos que, nessa solução particular, a influência da força percussiva se faz presente apenas pelo instante t_0 em que ela transmite o impulso e pelo valor Δp transmitido.

No limite em que $\tau \rightarrow 0$, com Δp mantido constante, a segunda condição em (3.135) torna-se $\dot{x}_p(t_0+0) = \Delta p/m$, que é o limite a direita da velocidade em t_0 . Uma vez que $\Delta p \neq 0$ (descartamos o caso trivial $\Delta p = 0$, em que não há percussão), temos que esse limite a direita é diferente do limite a esquerda $\dot{x}_p(t_0-0)$ que, de acordo com (3.134), é nulo. Portanto, no limite $\tau \rightarrow 0$ com Δp fixo, ocorre uma inevitável descontinuidade da velocidade no instante t_0 da percussão. Em suma, temos as seguintes condições sobre a solução exata (3.139) no instante $t = t_0$,

$$x_p(t_0-0) = 0 = x_p(t_0+0) \quad \text{e} \quad 0 = \dot{x}_p(t_0-0) \neq \dot{x}_p(t_0+0) = \Delta p/m. \quad (3.140)$$

No caso em que o oscilador é subamortecido a solução particular exata (3.139) é dada por

$$x_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0, \\ (\Delta p/m\omega_1) e^{-\gamma(t-t_0)} \sin \omega_1(t-t_0) & \text{se } t > t_0. \end{cases} \quad (3.141)$$

O limite idealizado que tomamos, em que a duração da força percussiva vai a zero mantendo constante o impulso que ela transmite, é chamado limite de **percussão idealizada**. Nesse limite a força percussiva é chamada **força percussiva idealizada**, e o movimento que ela provoca, **movimento percussivo idealizado**. Nessa situação idealizada obtemos uma solução particular exata para o movimento da partícula mas, para isso, pagamos o preço de sua velocidade apresentar uma descontinuidade no instante em que age a força percussiva. Um outro preço a ser pago nessa situação é que a própria força percussiva torna-se altamente singular no instante em que transmite seu impulso. Agora, vamos analisar mais de perto essa singularidade da força percussiva idealizada. Para tanto, não é importante o valor específico do impulso Δp , mas o fato de que ele é diferente de zero. Conseqüentemente, é conveniente definir, antes de tomarmos o limite de percussão idealizada, uma força percussiva por unidade de impulso. Denotando-a por δ_τ , temos $\delta_\tau(t, t_0) = \mathcal{F}(t)/\Delta p$. Conseqüentemente,

$$\mathcal{F}(t) = \Delta p \delta_\tau(t, t_0). \quad (3.142)$$

Usando que a força percussiva é nula fora do intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$ e que, de acordo com (3.132), transmite nesse intervalo impulso Δp , obtemos

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t, t_0) dt = 1 \quad \text{e} \quad (ii) \quad \delta_\tau(t, t_0) = 0 \quad \text{se } t \notin [t_0, t_0 + \tau]. \quad (3.143)$$

Tomando agora o limite $\tau \rightarrow 0$ com Δp constante, as propriedades (3.143) tomam a forma

$$(i) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\tau}(t, t_0) dt = 1 \quad \text{e} \quad (ii) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_{\tau}(t, t_0) = 0 \quad \text{se} \quad t \neq t_0. \quad (3.144)$$

De acordo com a propriedade (ii), o limite de δ_{τ} define uma função que depende apenas da diferença $t - t_0$ e que denotamos por δ ,

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_{\tau}(t, t_0), \quad (3.145)$$

Notemos que, na propriedade (i) em (3.144), o limite da integral é 1 apesar de tender a um ponto a região em que o integrando é diferente de zero. Isso somente acontece se o limite do integrando nesse ponto for infinito. Desse modo, devemos ter que a função δ em $t = t_0$ deve ser infinita, $\delta(0) = \infty$. Além disso, na propriedade (i) em (3.144) é costume, embora não seja matematicamente justificável, trocar a ordem do limite e da integração, de modo a obter que é igual a 1 a integral em função $\delta(t - t_0)$ de $t = -\infty$ a $t = +\infty$. Em suma, a função δ definida em (3.145) goza das propriedades

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq t_0, \\ \infty & \text{se } t = t_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (3.146)$$

Usando essas propriedades, obtemos que a função δ é simétrica, $\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t)$; também obtemos para qualquer função $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em t_0 ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) \delta(t - t_0) dt = \Psi(t_0). \quad (3.147)$$

Uma função δ que satisfaz a propriedade (3.147) é denominada **função delta de Dirac centrada em t_0** . Portanto, no limite de percussão idealizada, a força percussiva por unidade de impulso é uma função delta de Dirac centrada no instante de transmissão do impulso.

Para qualquer função delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^t \delta(t' - t_0) dt' = \Theta_H(t - t_0), \quad (3.148)$$

onde Θ_H é a **função de Heaviside com degrau em t_0** , definida por

$$\Theta_H(t - t_0) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0, \\ 1 & \text{se } t > t_0. \end{cases} \quad (3.149)$$

Tomando em ambos os membros da equação (3.142) o limite de percussão idealizada, e usando para o limite da força percussiva o mesmo símbolo \mathcal{F} usado para a força percussiva, obtemos

$$\mathcal{F}(t) = \Delta p \delta(t - t_0), \quad (3.150)$$

i.e., uma força percussiva idealizada é o produto do impulso que ela transmite por uma delta de Dirac centrada no instante em que ele é transmitido. Naturalmente, a

força percussiva idealizada é nula exceto no instante em que transmite o impulso, em que é infinita.

No limite (3.150) de força percussiva idealizada a equação diferencial de movimento (3.133) assume a forma

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + k \right) x(t) = \Delta p \delta(t - t_0) . \quad (3.151)$$

Para essa equação obtivemos a solução (3.139) que podemos escrever na forma

$$x_p(t) = \Theta_H(t - t_0) x_{h>}(t) , \quad (3.152)$$

na qual usamos a função degrau de Heaviside (3.149). No caso de um oscilador subamortecido, temos a solução (3.141), que escrevemos como

$$x_p(t) = \Theta_H(t - t_0) (\Delta p / m \omega_1) e^{-\gamma(t-t_0)} \sin \omega_1(t - t_0) , \quad (3.153)$$

Finalmente, notemos que a solução particular (3.152) não depende da forma precisa da função percussiva antes do limite de percussão idealizado. Podemos escolher para ela qualquer forma ou, equivalentemente, escolher qualquer forma para $\delta_\tau(t, t_0)$ em (3.142), desde que no limite $\tau \rightarrow 0$ a função δ_τ tenda para a função δ com as propriedades (3.146).

3.7 Oscilador harmônico forçado por força prescrita arbitrária.

As soluções particulares encontradas, nos casos de forças prescritas harmônica e percussiva, podem ser utilizadas para encontrar soluções particulares para forças prescritas mais genéricas. Para isso, utilizamos o seguinte princípio de superposição de soluções da equação diferencial com força prescrita (3.95): se as funções $x_n(t)$ ($n = 1, 2$) são soluções das equações diferenciais inomogêneas

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + k \right) x_n(t) = \mathcal{F}_n(t) \quad (n = 1, 2) , \quad (3.154)$$

então a função $x(t)$ definida como a soma das funções $x_n(t)$ ($n = 1, 2$),

$$x(t) = \sum_{n=1}^2 x_n(t) , \quad (3.155)$$

é solução da equação diferencial

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + k \right) x(t) = \mathcal{F}(t) , \quad (3.156)$$

na qual \mathcal{F} é a soma das funções \mathcal{F}_n ($n = 1, 2$),

$$\mathcal{F}(t) := \sum_{n=1}^2 \mathcal{F}_n(t) . \quad (3.157)$$

Esse princípio é conseqüência imediata da linearidade do operador diferencial no membro esquerdo das equações (3.154) e (3.156). Obviamente, ele também é válido se o índice n varre qualquer conjunto finito. Sob condições matemáticas apropriadas, que supomos satisfeitas em nossos problemas, o princípio é válido mesmo para n varrendo conjuntos infinitos, como \mathbb{N} , \mathbb{Z} ou \mathbb{R} . No caso em que o índice varre \mathbb{N} ou \mathbb{Z} , a função \mathcal{F} é uma série infinita de funções, e no caso em que varre \mathbb{R} , é uma integral de funções. Como conseqüência, a solução no primeiro caso é uma série infinita de soluções e no segundo, uma integral de soluções. A seguir temos um exemplo para cada um desses dois casos.

Primeiramente, apliquemos o princípio de superposição de soluções ao caso em que a força aplicada é uma superposição de forças harmônicas da forma

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \theta_n), \quad (3.158)$$

onde C_n , ω_n e θ_n ($n \in \mathbb{N}^*$) são constantes dadas. Estamos supondo a superposição de um número infinito de forças harmônicas, mas o uso do conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ para numerá-las é uma questão de conveniência. Evitamos o índice $n = 0$ apenas para evitar que qualquer freqüência ω_n das forças harmônicas pudesse ser confundida com a freqüência natural ω_0 do oscilador.

Para obter uma solução particular de (3.156), com $\mathcal{F}(t)$ dada por (3.158), usamos o princípio da superposição de soluções e o resultado (3.108), que dá a solução associada a cada termo da série (3.158). A solução particular assim obtida é

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \sin(\omega_n t + \theta_n + \beta_n)}{m \sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}}, \quad (3.159)$$

onde, em virtude de (3.109),

$$\beta_n = \arctg \frac{\omega_0^2 - \omega_n^2}{2\gamma\omega_n} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta_n \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (n \in \mathbb{N}^*). \quad (3.160)$$

Também podemos escrever (3.158) na forma

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (3.161)$$

onde $A_n := C_n \cos \theta_n$ e $B_n := -C_n \sin \theta_n$. Com isso, podemos reescrever (3.159) como

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sin(\omega_n t + \beta_n) - B_n \cos(\omega_n t + \beta_n)}{m \sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}}. \quad (3.162)$$

Um caso importante de superposição de forças harmônicas é o da força prescrita periódica. Chamando T o período da força $F = \mathcal{F}(t)$, temos:

$$\mathcal{F}(t + T) = \mathcal{F}(t). \quad (3.163)$$

Em análise de Fourier demonstra-se que qualquer \mathcal{F} seccionalmente contínua, que satisfaz à condição de periodicidade (3.163), pode ser escrita como a superposição

$$\mathcal{F}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + B_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right), \quad (3.164)$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ e} \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.165)$$

Nesse caso, temos uma superposição de forças na qual entram forças harmônicas com frequências proporcionais aos inteiros positivos, $\omega_n = (2\pi/T)n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), e uma força constante $A_0/2$. As idéias usadas para obter a solução particular (3.162), no caso da superposição (3.158), podem ser empregadas para obter uma solução particular no caso da superposição (3.164). Nesse caso, usamos (3.108), (3.109), (3.131) e o princípio de superposição de soluções, para obter a solução particular

$$\begin{aligned} x_p(t) = \frac{A_0}{2m\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n}{m\sqrt{\left[\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 - \omega_0^2\right]^2 - 4\gamma^2\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t + \beta_n\right) - \right. \\ \left. - \frac{B_n}{m\sqrt{\left[\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 - \omega_0^2\right]^2 - 4\gamma^2\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2}} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t + \beta_n\right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.166)$$

onde

$$\beta_n = \arctg \frac{\omega_0^2 - (2\pi n/T)^2}{2\gamma(2\pi n/T)} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta_n \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*). \quad (3.167)$$

Uma série de funções $\cos(2\pi nt/T)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) e $\sin(2\pi nt/T)$ ($n = 1, 2, \dots$), como em (3.164), é chamada **série de Fourier**. O princípio de superposição de soluções pode ser usado para encontrar uma solução particular, através de um formalismo semelhante ao da série de Fourier, mesmo quando a força não é periódica, como postulado em (3.163). Contudo, nesse caso, é necessário usar no lugar da série de Fourier uma integral chamada transformada de Fourier. Esse método de encontrar soluções particulares de (3.156), baseado na superposição de soluções particulares de forças harmônicas, é chamado **método de Fourier**.

Agora, passemos ao método de encontrar soluções particulares da equação inhomogênea (3.156), baseado na superposição de soluções particulares de forças percussivas; ele é chamado **método da função de Green** e se baseia na idéia de que qualquer força prescrita pode ser vista como uma soma ou série de forças percussivas consecutivas. No caso limite de percussão idealizada, a força prescrita pode ser

vista como uma integral de forças percussivas idealizadas, de acordo com a seguinte expressão decorrente da propriedade (3.147) da delta de Dirac,

$$\mathcal{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') \mathcal{F}(t') dt' . \quad (3.168)$$

Com efeito, nessa expressão, o integrando pode ser comparado com (3.150) e interpretado como uma força percussiva idealizada $\delta(t - t') \mathcal{F}(t') dt'$, que transmite o impulso $\mathcal{F}(t') dt'$ no instante t' . Com isso, a força prescrita é dada em (3.168) por uma superposição dessas forças impulsivas, sendo a superposição descrita por uma soma com índice contínuo $t' \in \mathbb{R}$, *i.e.*, por uma integral em t' , de $t' = -\infty$ a $t' = +\infty$.

Substituindo na equação diferencial inhomogênea (3.156) a expressão (3.168) para a força prescrita arbitrária \mathcal{F} , é fácil verificar que

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') \mathcal{F}(t') dt' , \quad (3.169)$$

é solução particular da equação diferencial se a função $G(t, t')$ satisfizer a seguinte equação diferencial

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + k \right) G(t, t') = \delta(t - t') . \quad (3.170)$$

Portanto, todo o trabalho para determinar a solução particular (3.169) para qualquer força prescrita \mathcal{F} resume-se a encontrar uma solução particular $G(t, t')$ da equação (3.170). Felizmente, já dispomos dessa solução, como se vê comparando a equação (3.170) com a equação (3.151) para um força percussiva idealizada de impulso Δp . Obviamente, dividindo por Δp qualquer solução particular da equação (3.151) obtemos uma solução particular para a equação (3.170). Como já dispomos para (3.151) da solução particular $x_p(t)$ dada em (3.152), obtemos a seguinte solução particular para a equação (3.170),

$$G(t, t') = \Theta_H(t - t_0) \frac{x_{h>}(t)}{\Delta p} . \quad (3.171)$$

Por exemplo, no caso do oscilador subamortecido, (3.153) nos fornece a seguinte solução particular de (3.170),

$$G(t, t') = \Theta_H(t - t_0) (1/m\omega_1) e^{-\gamma(t-t_0)} \sin \omega_1(t - t_0) , \quad (3.172)$$

A equação diferencial (3.170) é chamada **equação diferencial para função de Green associada à equação inhomogênea** (3.156). Por definição, obtemos a primeira equação substituindo na última o termo prescrito $\mathcal{F}(t)$ pela delta de Dirac $\delta(t - t')$, na qual t' é um instante qualquer. Naturalmente, chamamos **função de Green associada à equação inhomogênea** (3.156) a qualquer solução particular $G(t, t')$ da equação (3.170). O método da função de Green consiste, como o nome bem descreve, em encontrar uma função de Green para determinar uma solução particular da equação inhomogênea por meio da fórmula (3.169). No caso em consideração, em que a equação é a do oscilador harmônico amortecido com força prescrita, a função de

Green pode ser determinada pelos procedimentos da seção anterior que resultaram na solução (3.171). No caso subamortecido, por exemplo, encontramos explicitamente a função de Green (3.172). Vale lembrar que esses procedimentos consistiram, essencialmente, em considerar uma força percussiva em um certo intervalo, encontrar fora do intervalo a solução aproximada da equação homogênea associada e, finalmente, tomar o limite de percussão idealizada, no qual a duração do intervalo vai a zero.

Capítulo 4

Movimento Multidimensional de uma partícula

4.1 Introdução

Para estudar os movimentos não-retilíneos de uma partícula torna-se imprescindível o uso de vetores. Neste capítulo, em que estudamos tais movimentos, voltamos a usar a função-movimento ϕ , que associa a cada instante do tempo t o vetor-posição \mathbf{r} da partícula nesse instante,

$$\mathbf{r} = \phi(t) . \quad (4.1)$$

A função-movimento ϕ determina a trajetória da partícula, que é uma curva \mathcal{C} no espaço. Vamos considerar alguns conceitos associados à essa trajetória que são úteis no estudo do movimento da partícula. Por ora, não precisamos tomar ϕ como um movimento real da partícula; ele pode ser considerado um movimento virtual qualquer, exceto pelo fato de que sua trajetória é uma dada curva \mathcal{C} .

Seja um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$ ao longo da curva \mathcal{C} , *i.e.*, o vetor $d\mathbf{r}$ vai de um ponto de curva, digamos P , até um outro ponto da curva, $P + d\mathbf{r}$. Tomemos uma seqüência de deslocamentos infinitesimais consecutivos ao longo da curva, com o início do primeiro deslocamento no ponto P_1 e o final do último no ponto P_2 . A soma desses deslocamentos é a integral

$$\int_{P_1}^{P_2} d\mathbf{r} = \overrightarrow{P_1 P_2} , \quad (4.2)$$

que é o deslocamento do ponto P_1 da curva ao ponto P_2 da curva. Notemos que esse deslocamento depende apenas do par de pontos, mas não da forma da curva que vai de um até o outro. Pensando na integral como a seqüência de deslocamentos em um movimento da partícula que vai de P_1 até P_2 , podemos também dizer que a integral não depende do movimento da partícula, mas apenas do par de pontos P_1 e P_2 .

Figura 4.1: Trajetória de uma partícula no espaço, com o vetor-posição, a velocidade e a aceleração em um ponto P .

Voltemos ao deslocamento $d\mathbf{r}$ ao longo da curva, do ponto P ao ponto $P' = P + d\mathbf{r}$; por ser um deslocamento infinitesimal, o seu módulo é o comprimento do arco infinitesimal de P a P' . Seja um arco da curva desde um ponto P_1 até um ponto P_2 ; se integrarmos o módulo dos deslocamentos, ao longo desse arco, obteremos a distância que a partícula percorre em seu movimento ao longo desse arco. Essa distância depende do movimento da partícula. De fato, se ela for de P_1 a P_2 sem mudar o sentido de sua velocidade, ela percorre uma distância igual ao comprimento do arco. Em contrapartida, se no movimento de P_1 a P_2 a partícula mudar o sentido de sua velocidade, ela percorre uma distância maior que o comprimento do arco. Denotando a **distância percorrida** pela partícula por $d(P_1, P_2; \boldsymbol{\phi})$, temos

$$\int_{P_1(\boldsymbol{\phi})}^{P_2} |d\mathbf{r}| = d(P_1, P_2; \boldsymbol{\phi}), \quad (4.3)$$

onde tivemos o cuidado de agregar $\boldsymbol{\phi}$ ao símbolo da integral, para indicar que ela depende do movimento.

Fixemos na curva \mathcal{C} um sentido de percurso que chamamos **sentido positivo da curva**, sendo o oposto, então, chamado **sentido negativo da curva**. Seja um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$ ao longo da curva, do ponto P ao ponto $P' = P + d\mathbf{r}$. **Espaço percorrido** no arco infinitesimal de P a P' é, por definição, o real $ds = \pm|d\mathbf{r}|$, conforme $d\mathbf{r}$ aponte no sentido positivo ou negativo da curva. Seja uma curva \mathcal{C} aberta que não se intercepta; se uma partícula se mover nela, de um ponto P_1 a um ponto P_2 , e os espaços percorridos em seus deslocamentos infinitesimais forem adicionados, obteremos um quantidade que depende do par de pontos P_1 e P_2 , e da curva \mathcal{C} , mas não do particular movimento que a partícula realiza nessa curva.

Denotamos tal quantidade por $\Delta s(P_1, P_2; \mathcal{C})$, de modo que

$$\int_{P_1(\mathcal{C})}^{P_2} ds = \Delta s(P_1, P_2; \mathcal{C}), \quad (4.4)$$

onde agregamos \mathcal{C} ao símbolo da integral para deixar explícito que ela depende da curva percorrida pela partícula. Vamos fixar uma curva \mathcal{C} e nela um ponto $O_{\mathcal{C}}$. Nesse caso, o espaço percorrido ao longo da curva, de $O_{\mathcal{C}}$ até um ponto P qualquer da curva, é uma função apenas de P , que denotamos por $s(P)$ e chamamos **espaço percorrido até P** . Desse modo, temos

$$s(P) = \int_{O_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}^P ds. \quad (4.5)$$

Notemos que a correspondência entre os pontos da curva e os possíveis espaços percorridos é biunívoca; a cada ponto corresponde um único valor do espaço percorrido e vice-versa. O espaço percorrido até o ponto P localiza P na curva. Por esse motivo também chamamos o espaço-percorrido **coordenada do ponto ao longo da curva**. O ponto fixado $O_{\mathcal{C}}$ é chamado **origem das coordenadas ao longo da curva**; obviamente, a coordenada de P , *i.e.*, o espaço percorrido até P , é positivo ou negativo conforme o sentido de $O_{\mathcal{C}}$ para P ao longo da curva seja o sentido positivo ou negativo da curva. Estando fixada a curva \mathcal{C} em (4.4), podemos denotar o espaço percorrido $\Delta s(P_1, P_2; \mathcal{C})$ por $\Delta s(P_1, P_2)$ e escrever $\Delta s(P_1, P_2) = s(P_2) - s(P_1)$. Em geral, denotamos o espaço percorrido $s(P)$, simplesmente, por s .

Agora, seja uma curva fechada e simples, na qual também fixamos um ponto $O_{\mathcal{C}}$. Podemos integrar ds de $O_{\mathcal{C}}$ até um dado ponto P nos dois sentidos da curva, ou ainda, percorrendo-se diferentes números de vezes a curva fechada inteira, antes de parar em P . Podemos chamar cada um dos valores obtidos **espaço percorrido até P** e concluir que a cada ponto P corresponde uma infinidade de espaços percorridos, conforme o movimento considerado ao longo da curva, de $O_{\mathcal{C}}$ a P . De fato, se $\ell(\mathcal{C})$ é o comprimento da curva fechada e s é o comprimento de um arco da curva de $O_{\mathcal{C}}$ a P , então os espaços percorridos de até P são dados pelos valores $s + n\ell(\mathcal{C})$ com $n \in \mathbb{Z}$. Podemos estender o conceito de espaço percorrido a curvas que não são simples, tomando-se um cuidado especial nos pontos de cruzamento.

Seja um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$ ao longo da curva, de um ponto P a um ponto $P' = P + d\mathbf{r}$ e ds o espaço percorrido no arco infinitesimal de P a P' . Pela definição de ds , o vetor $d\mathbf{r}/ds$ é tangente à curva no ponto P , aponta no sentido positivo da curva e tem módulo igual a um. Ele é chamado **unitário tangente** à curva em P e é representado por \mathbf{t} ,

$$\mathbf{t} := \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (4.6)$$

A taxa de variação de \mathbf{t} por unidade de deslocamento na curva é $d\mathbf{t}/ds$. É um vetor perpendicular a \mathbf{t} , pois \mathbf{t} tem módulo constante. O módulo de $d\mathbf{t}/ds$ é chamado **curvatura** da curva no ponto P em consideração. Representamos a curvatura por κ e definimos vetor **normal principal** em P como sendo o unitário na direção e sentido

da taxa de variação de \mathbf{t} , *i.e.*, $\mathbf{n} := (d\mathbf{t}/ds)/\kappa$. Temos, então,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n} . \quad (4.7)$$

Notemos que a variação $d\mathbf{t}$ ao longo de ds é uma variação apenas em direção, pois o módulo de \mathbf{t} é constante. Com isso, temos que a curva tem um encurvamento (no sentido intuitivo dessa palavra) tanto maior quanto maior for a variação de $d\mathbf{t}$ por unidade de ds . Portanto, a escolha da palavra curvatura para designar o módulo de $d\mathbf{t}/ds$ está de acordo com o significado intuitivo que atribuímos a essa palavra.

Definimos o vetor **binormal** no ponto P da curva como sendo o unitário dado pelo produto vetorial do unitário tangente pelo normal principal, ambos em P . Representamos por \mathbf{b} o binormal,

$$\mathbf{b} := \mathbf{t} \times \mathbf{n} . \quad (4.8)$$

Figura 4.2: Triedo de Frenet-Serre e os planos osculador, normal e retificante.

Os vetores \mathbf{t} , \mathbf{n} e \mathbf{b} são chamados **vetores de Frenet-Serre**. A trinca $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ é uma base ordenada dextrógira e ortonormal, que chamamos **base** ou **triedo de Frenet-Serre**. Chamamos **planos osculador, normal e retificante** em um ponto da curva, os planos que passam pelo ponto e que têm as respectivas jazituras de \mathbf{t} e \mathbf{n} , de \mathbf{n} e \mathbf{b} e de \mathbf{b} e \mathbf{t} , todos esses vetores no ponto em consideração.

As taxas de variação de \mathbf{n} e \mathbf{b} , por unidade de deslocamento ao longo da curva, também podem ser expressas na própria base de Frenet-Serre. O vetor $d\mathbf{n}/ds$ só pode ter componentes ao longo de \mathbf{t} e \mathbf{b} , pois é ortogonal a \mathbf{n} . A componente ao longo de \mathbf{b} é representada por τ e chamada **torção** da curva no ponto em consideração.

(tal designação também está de acordo com o significado intuitivo de torção). A componente ao longo de \mathbf{t} é $\mathbf{t} \cdot (d\mathbf{n}/ds)$, que é igual a $-\mathbf{n} \cdot (d\mathbf{t}/ds)$, em virtude da condição de ortogonalidade $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$; usando (4.7) obtemos que tal componente é $-\kappa$. Temos, portanto,

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} . \quad (4.9)$$

Derivando em relação a s ambos os membros de (4.8) e usando a ortonormalidade da base de Frenet-Serre, juntamente com as equações (4.7) e (4.9), obtemos

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} . \quad (4.10)$$

As equações (4.7), (4.9) e (4.10), dão as taxas de variação dos vetores de Frenet-Serre por unidade de deslocamento na curva,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n} , \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} , \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} \quad (4.11)$$

e são chamadas **fórmulas de Frenet-Serre**.

O inverso da curvatura em um ponto P da curva é chamado **raio de curvatura da curva no ponto P** , e é denotado por ρ ,

$$\rho := \frac{1}{\kappa} . \quad (4.12)$$

O vetor $\rho\mathbf{n}$ aplicado no ponto P tem sua extremidade final em um ponto C localizado na reta suporte de \mathbf{n} . Esse ponto C é chamado **centro de curvatura da curva no ponto P** . O círculo contido no plano osculador, centrado no centro de curvatura C e com raio igual ao raio de curvatura ρ , é chamado **círculo osculador da curva no ponto P** .

Usando a definição (4.12) de raio de curvatura e as fórmulas de Frenet-Serre (4.11), obtemos as seguintes expressões para a velocidade e a aceleração da partícula na base de Frenet-Serre,

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{t} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} . \quad (4.13)$$

Chamamos \dot{s} **celeridade**, **velocidade escalar** ou **rapidez** da partícula no ponto P da trajetória. O vetor $\ddot{s}\mathbf{t}$ é chamado **aceleração tangencial da partícula no ponto P da trajetória** e o vetor $\dot{s}^2\mathbf{n}/\rho$, **aceleração centrípeta** ou **aceleração radial da partícula no ponto P da trajetória**. Notemos que a aceleração centrípeta da partícula no ponto P da trajetória é a aceleração que teria uma partícula hipotética que estivesse em movimento circular uniforme com celeridade \dot{s} , percorrendo o círculo que oscula a curva no ponto P .

A base de Frenet-Serre é obtida da trajetória da partícula e sua importância reside exatamente no fato de seus vetores serem definido por propriedades intrínsecas da trajetória. Outras bases são importantes no estudo do movimento tridimensional, por sua utilidade na exploração das simetrias do sistema ou do movimento em consideração. Essas bases são obtidas de particulares sistemas de coordenadas, como

os sistemas de coordenadas cartesianas, de coordenadas esféricas e de coordenadas cilíndricas.

Depois dos conceitos cinemáticos apresentados nesta seção, consideremos a questão dinâmica fundamental, que consiste em determinar os possíveis movimentos multidimensionais de uma partícula na presença de uma dada vizinhança. Eles são determinados pela Segunda Lei de Newton em forma vetorial,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) . \quad (4.14)$$

Essa equação é equivalente às três equações escalares

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \mathcal{F}_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) , \\ m\ddot{y} &= \mathcal{F}_y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \quad \text{e} \\ m\ddot{z} &= \mathcal{F}_z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Em geral, essas equações diferenciais são acopladas, *i.e.*, cada uma depende de mais de uma incógnita, de modo que não podemos resolver cada uma sem resolver simultaneamente as outras. Tais equações continuam em geral acopladas, mesmo quando a força depende exclusivamente da posição ou da velocidade. Parte significativa do formalismo da Mecânica consiste em métodos para desacoplar tais equações ou resolvê-las simultaneamente. Em algumas situações muito simples elas já se apresentam desacopladas. Uma delas é quando a força depende exclusivamente do tempo; nesse caso, (4.15) reduz-se a três problemas unidimensionais e podemos resolver cada equação separadamente das outras. Um outra situação, de considerável interesse, é dada pelo **oscilador harmônico tridimensional**, definido como uma partícula sujeita à força resultante

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -k_x x \hat{\mathbf{x}} - k_y y \hat{\mathbf{y}} - k_z z \hat{\mathbf{z}} , \quad (4.16)$$

na qual k_x , k_y e k_z são constantes características do oscilador. Sendo m a massa do oscilador temos a equação de movimento

$$m(\ddot{x}\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{z}}) = -k_x x \hat{\mathbf{x}} - k_y y \hat{\mathbf{y}} - k_z z \hat{\mathbf{z}} , \quad (4.17)$$

que é equivalente às três equações

$$m\ddot{x} = k_x x , \quad m\ddot{y} = k_y y \quad \text{e} \quad m\ddot{z} = k_z z . \quad (4.18)$$

Cada uma das equações em (4.18) é idêntica à equação de um oscilador harmônico unidimensional e, em conjunto, dão a seguinte solução geral para o movimento do oscilador harmônico tridimensional

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x) , \quad y = A_y \cos(\omega_y t + \theta_y) \quad \text{e} \quad z = A_z \cos(\omega_z t + \theta_z) , \quad (4.19)$$

na qual

$$\omega_x := \sqrt{\frac{k_x}{m}} , \quad \omega_y := \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_z := \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad (4.20)$$

são as frequências de oscilação nas direções de $O\mathcal{X}$, $O\mathcal{Y}$ e $O\mathcal{Z}$, respectivamente, e A_x , A_y , A_z , θ_x , θ_y e θ_z são constantes a serem fixadas pelas condições iniciais do oscilador. O movimento (4.19) se processa dentro de um paralelepípedo retangular centrado na origem e de arestas de dimensões $2A_x$, $2A_y$ e $2A_z$; a trajetória entra em contato com todas as faces do paralelepípedo. As coordenadas x , y e z variam periodicamente com períodos $2\pi/\omega_x$, $2\pi/\omega_y$ e $2\pi/\omega_z$, respectivamente. O movimento (4.19) é periódico se, e somente se, esses períodos tiverem um múltiplo comum, *i.e.*, se as frequências forem comensuráveis, digamos $2\pi n_x/\omega_x = 2\pi n_y/\omega_y = 2\pi n_z/\omega_z$ ($n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$); o período do movimento é o mínimo múltiplo comum. Se as frequências forem incomensuráveis o movimento não é periódico e é então possível demonstrar que a trajetória do movimento é densa no paralelepípedo em que se processa o movimento. No caso particular em que $k_x = k_y = k_z$ o oscilador é dito **isotrópico** e a trajetória é uma elipse, como é facilmente demonstrável.

4.2 Teoremas do momento linear, do momento angular e da energia cinética

Usando a definição (2.78) de momento linear de uma partícula,

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} , \tag{4.21}$$

podemos escrever a Segunda Lei de Newton na forma

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) , \tag{4.22}$$

que afirma ser a força resultante igual à taxa de variação do momento linear. Integrando a Segunda Lei de Newton (4.22) no decorrer de um movimento ϕ , desde um instante t_1 até um instante t_2 , obtemos

$$\mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dt , \tag{4.23}$$

onde usamos a definição

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dt := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t) dt . \tag{4.24}$$

A integral no membro direito de (4.23) é chamada **impulso** fornecido à partícula pela força $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ durante o intervalo $[t_1, t_2]$ do movimento ϕ . A equação (4.23) afirma que esse impulso é igual à variação do momento linear da partícula do instante t_1 até o instante t_2 ; essa equação é chamada **teorema do impulso e momento linear** ou **teorema do momento linear na forma integral**. Nesse contexto, a Segunda Lei de Newton (4.22) pode ser chamada teorema do momento linear na forma diferencial.

No caso do movimento multidimensional torna-se importante a posição que a partícula ocupa em um plano perpendicular ao seu momento linear \mathbf{P} . Essa posição pode ser especificada por $\mathbf{r}_\perp := \Pi_{\mathbf{P}}\mathbf{r}$, onde \mathbf{r} é o vetor-posição da partícula. Daí ser

importante no movimento multidimensional a grandeza $\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$. Definimos **momento angular da partícula relativo à origem O** como sendo a grandeza

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}} . \quad (4.25)$$

onde m é a massa da partícula. A taxa de variação do momento angular pode ser obtida usando-se a Segunda Lei de Newton (4.22) e é dada por

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (4.26)$$

Definimos **torque de uma força \mathbf{F} aplicada em um ponto P , relativo à origem O** , como sendo o produto vetorial de $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{r}$ pela força \mathbf{F} ; denotando por \mathbf{N} o torque temos

$$\mathbf{N} := \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (4.27)$$

No caso da equação (4.26) a força \mathbf{F} é a resultante e obtemos que a taxa de variação do momento angular é igual ao torque da força resultante,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} . \quad (4.28)$$

Esse é o **teorema do momento angular e torque**. O torque (3.26) é uma função de posição, velocidade e tempo, definida por $\mathbf{N}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Integrando (4.28) no decorrer de um movimento ϕ , desde um instante t_1 até um instante t_2 , obtemos

$$\mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{N}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dt , \quad (4.29)$$

onde usamos a definição

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{N}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dt := \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{N}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t) dt . \quad (4.30)$$

A equação (4.29) pode ser chamada **teorema do momento angular na forma integral** e (4.28) **teorema do momento angular na forma diferencial**.

Definimos **momento angular da partícula relativo a um ponto fixo Q** como sendo o vetor

$$\mathbf{L}_Q = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times m \dot{\mathbf{r}} \quad (4.31)$$

e, **torque de uma força \mathbf{F} relativo a um ponto fixo Q** como sendo o vetor

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F} \quad (4.32)$$

O ponto Q , relativo ao qual são definidos o momento angular e o torque é chamado **ponto base**.

Se Q é um ponto qualquer fixo em relação ao referencial inercial em uso, temos

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q . \quad (4.33)$$

Usando o teorema do momento linear, (4.22) ou (4.23), concluímos que o momento linear da partícula é constante quando a força resultante é zero. Este resultado nada mais é do que a afirmação de que a velocidade de uma partícula é constante quando é nula a resultante sobre ela. Usando o teorema do momento angular, (4.28) ou (4.29), concluímos que o momento angular da partícula é constante quando o torque da força resultante é zero. Esse é o chamado **teorema da conservação do momento angular da partícula**. Notemos que o torque pode ser nulo sem que a força resultante o seja, de modo a haver conservação de momento angular sem conservação de momento linear. Se é conservado o momento angular da partícula, o seu movimento se processa em um plano ortogonal à direção do momento angular constante, quando esse for diferente de zero; se o momento angular for zero temos que $\dot{\mathbf{r}}$ deve ser paralelo a \mathbf{r} e concluímos que o movimento é unidimensional. No caso do movimento plano, temos que o vetor posição \mathbf{r} da partícula varre no plano áreas iguais em tempos iguais, em consequência do módulo do momento angular ser constante e diferente de zero.

Voltemos agora à Segunda Lei de Newton escrita na forma

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) . \quad (4.34)$$

Multiplicando nessa equação ambos os membros escalarmente por \mathbf{v} , o membro esquerdo torna-se uma diferencial total,

$$\frac{d}{dt} T = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v} , \quad (4.35)$$

onde usamos a definição

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 . \quad (4.36)$$

A quantidade T é chamada **energia cinética da partícula**. O membro direito de (4.35) é chamado **potência fornecida pela força** no instante t . A equação (4.35) estabelece que a taxa de variação da energia cinética da partícula é igual à potência fornecida pela força resultante. Integrando (4.35) no decorrer de um movimento ϕ , desde um instante t_1 até um instante t_2 , obtemos

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1(\phi)}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v} dt , \quad (4.37)$$

onde usamos a definição

$$\int_{t_1(\phi)}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v} dt := \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\phi(t), \dot{\phi}(t), t) \cdot \dot{\phi} dt . \quad (4.38)$$

Essa integral é chamada **trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ no decorrer do movimento ϕ , desde o instante t_1 até o instante t_2** . Na equação (4.37) a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ é a resultante, de modo a termos o resultado: o trabalho realizado pela força resultante em um certo intervalo de tempo é igual à variação da energia cinética da partícula no intervalo. A equação (4.37) é chamada **teorema do trabalho e energia cinética**; podemos também denominá-la **teorema da energia cinética em forma integral**, enquanto a equação (4.35) é denominada **teorema da energia cinética em forma diferencial**.

4.3 Forças conservativas e energia potencial

Consideremos agora uma força \mathbf{F} que depende apenas da posição \mathbf{r} da partícula,

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) . \quad (4.39)$$

Nesse caso, de acordo com a definição (4.38), o trabalho realizado por \mathbf{F} durante um movimento ϕ , do instante t_1 ao t_2 , é dado por

$$\int_{t_1(\phi)}^{t_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} dt := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(\phi(t)) \cdot \dot{\phi}(t) dt . \quad (4.40)$$

Sendo \mathcal{C} a trajetória da partícula no movimento ϕ , temos que $\phi(t)$ é o vetor posição de um ponto da trajetória e $\dot{\phi}(t)dt$ um deslocamento infinitesimal ao longo da trajetória a partir desse ponto. Portanto,

$$\int_{t_1(\phi)}^{t_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} dt = \int_{\mathbf{r}_1(\mathcal{C})}^{\mathbf{r}_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (4.41)$$

onde $\mathbf{r}_1 = \phi(t_1)$, $\mathbf{r}_2 = \phi(t_2)$, e \mathcal{C} junto ao símbolo da integral indica que no integrando $d\mathbf{r}$ é deslocamento infinitesimal ao longo da trajetória a partir da posição \mathbf{r} na trajetória. Portanto, se uma força depende apenas da posição da partícula, o seu trabalho depende apenas das posições inicial e final no intervalo de tempo considerado e da trajetória da partícula entre essas posições . Nesse caso, o trabalho não mais depende do movimento ao longo da trajetória e tampouco dos instantes em que a partícula ocupa as chamadas posição inicial e final.

Uma força \mathbf{F} que depende apenas da posição é dita uma **força conservativa** se, para qualquer par de posições inicial e final, o trabalho que ela realiza não depende da trajetória seguida. No caso do movimento da partícula ser estritamente unidimensional a condição necessária e suficiente para que uma força seja conservativa é que ela dependa apenas da posição da partícula. Esse não é o caso no movimento geral multidimensional; se os movimentos possíveis não estão restritos a uma reta, a força pode depender apenas da posição e, ainda assim, não ser conservativas. É fácil encontrar exemplos de forças que dependem apenas da posição e que realizam trabalhos diferentes ao longo de diferentes trajetórias que ligam um mesmo par de pontos. No caso multidimensional, para que uma força seja conservativa é necessário que ela dependa apenas da posição, mas não é suficiente. Mais adiante estudaremos condições necessárias e suficientes para que uma força seja conservativa.

Se uma força $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r})$ é conservativa, o trabalho que ela realiza no deslocamento de uma posição inicial \mathbf{r}_1 para uma posição final \mathbf{r}_2 , é uma função apenas dessas posições. Representando por $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ esse trabalho, temos

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} . \quad (4.42)$$

É importante notar que esse trabalho da força conservativa \mathbf{F} pode ser calculado mesmo considerando-se uma curva de \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 que não seja uma trajetória possível da

partícula no problema em consideração; basta que a curva passe apenas por posições \mathbf{r} nas quais a função-força \mathcal{F} seja definida. É fácil demonstrar que uma força \mathbf{F} é conservativa se, e somente se, é nulo o trabalho que ela realiza ao longo de qualquer curva fechada, *i.e.*,

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) \text{ é conservativa} \iff \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (4.43)$$

para qualquer curva fechada \mathcal{C} . Se uma força \mathbf{F} é conservativa podemos, após fixarmos uma posição \mathbf{r}_p no espaço, que chamamos de **posição padrão**, definir a seguinte função U ,

$$U(\mathbf{r}) := W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathcal{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \quad (4.44)$$

A função U é chamada de uma **energia potencial** associada à força \mathbf{F} . Notemos que a escolha de uma outra posição padrão leva a uma outra energia potencial, que difere da anterior por uma constante aditiva. De (4.44) obtemos

$$dU(\mathbf{r}) = -\mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (4.45)$$

No membro direito dessa equação temos o trabalho elementar $\mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, realizado pela força em um deslocamento elementar $d\mathbf{r}$. No membro esquerdo temos o diferencial exato de uma função escalar U , que depende apenas da posição \mathbf{r} . A equação mesma afirma que o trabalho elementar de uma força conservativa é o diferencial exato de uma função escalar que depende apenas da posição. Mais especificamente, é o diferencial exato da função $-U$, *i.e.*, $\mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = d[-U(\mathbf{r})]$. Em contrapartida, é trivial verificar que uma força que depende apenas da posição é conservativa se o seu trabalho elementar é igual ao diferencial exato de alguma função escalar que depende apenas da posição. Portanto, podemos dizer que a condição necessária e suficiente para que uma força que depende apenas da posição seja conservativa é que o seu trabalho elementar seja o diferencial exato de uma função escalar que depende apenas da posição. Nesse caso, o negativo de uma tal função é uma energia potencial da força conservativa.

Da equação (4.45) obtém-se, imediatamente,

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) . \quad (4.46)$$

Essa equação dá a força a partir da energia potencial e pode ser vista como a relação inversa de (4.44), que dá a energia potencial a partir da força. Como são as forças que determinam o movimento, podemos mudar a energia potencial de qualquer maneira que não provoque uma mudança na força. A equação (4.46) mostra então que a mudança mais geral que podemos fazer na energia potencial é acrescentar-lhe uma constante aditiva, *i.e.*, se U é energia potencial da força \mathbf{F} , podemos substituir U por $U + C$, onde C é uma constante arbitrária. Também $U + C$ é chamada energia potencial de \mathbf{F} .

Uma vez que todo gradiente é irrotacional, temos, em virtude de (4.46), que toda força conservativa é irrotacional,

$$\nabla \times \mathcal{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} . \quad (4.47)$$

Portanto, toda força conservativa, *i.e.*, que satisfaz à equação (4.43), possui uma energia potencial e é irrotacional.

Agora, consideremos uma força \mathbf{F} que depende apenas da posição \mathbf{r} e que é irrotacional, *i.e.*, que satisfaz $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ em todos os pontos no qual \mathbf{F} é definida. Suponhamos, além disso, que no domínio de definição dessa força qualquer curva fechada \mathcal{C} é a borda de alguma superfície \mathcal{S} totalmente contida no domínio de definição de \mathbf{F} . Nesse caso, temos que $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ e podemos aplicar o teorema de Stokes para \mathbf{F} e \mathcal{S} ,

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds, \quad (4.48)$$

onde \mathbf{n} é o unitário normal de \mathcal{S} e \mathbf{t} é o unitário tangente de $\partial\mathcal{S}$, escolhidos de modo a terem orientação relativa dextrógiara. Usando em (4.48) a irrotacionalidade de \mathbf{F} obtemos que \mathbf{F} é conservativa. Portanto, se uma força que depende apenas da posição é irrotacional, e se o seu domínio de definição é tal que nele qualquer curva fechada é a borda de uma superfície toda contida no domínio, então a força é conservativa. Em virtude desse resultado, podemos também afirmar que, se o domínio de definição de uma força que depende apenas da posição tem essa propriedade, a força é conservativa se, e somente se, é irrotacional.

Quando uma força \mathbf{F} depende apenas da posição, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, podemos traçar no espaço curvas fixas e contínuas que são, em cada ponto, tangentes a \mathbf{F} . Para qualquer deslocamento $d\mathbf{r}$ ao longo de uma tal curva, temos $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}(\mathbf{r})$; também associamos a cada ponto da curva um sentido, dado pelo sentido do vetor \mathbf{F} no ponto. A curva assim definida é chamada uma **linha de força** de \mathcal{F} . Se, além disso, \mathbf{F} é conservativa, ela tem uma energia potencial U . O conjunto de pontos nos quais a energia potencial tem um valor fixo forma uma superfície que chamamos **superfície equipotencial**. De (4.45) segue-se, de imediato, que a força em um ponto de uma superfície equipotencial é perpendicular à superfície neste ponto; dito de outro modo, as linhas de força atravessam perpendicularmente as superfícies equipotenciais.

Agora, suponhamos que a força conservativa \mathbf{F} seja a força resultante sobre a partícula em consideração. Nesse caso, voltamos à situação em que obtivemos o teorema do trabalho e energia cinética, no intervalo $[t_1, t_2]$ de um movimento ϕ da partícula. Levando em conta o caráter conservativo da força temos que o trabalho depende apenas das posições inicial e final e (4.37) assume a forma

$$T(t_2) - T(t_1) = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (4.49)$$

onde usamos a notação definida em (4.42). Mas sendo \mathbf{F} conservativa temos que

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_p) + W(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2), \quad (4.50)$$

em virtude da definição (4.44) de energia potencial. Substituindo (4.50) em (4.49), obtemos

$$T(t_2) + U(\mathbf{r}_2) = T(t_1) + U(\mathbf{r}_1) \quad (4.51)$$

Usando a notação $\mathbf{v}_1 = \dot{\phi}(t_1)$ e $\mathbf{v}_2 = \dot{\phi}(t_2)$, podemos reescrever (4.51) na forma

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 + U(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 + U(\mathbf{r}_1). \quad (4.52)$$

Sejam \mathbf{r} e \mathbf{v} a posição e velocidade da partícula em um certo instante. Neste instante a energia cinética da partícula é $m\mathbf{v}^2/2$ e a energia potencial da força resultante é $U(\mathbf{r})$. A soma dessas duas grandezas é chamada **energia mecânica E do sistema constituído por partícula e vizinhança**,

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) . \quad (4.53)$$

A equação (4.52) afirma que a energia mecânica do sistema é constante durante cada movimento real da partícula no caso da força resultante ser conservativa; esse resultado é chamado **teorema da conservação da energia mecânica**.

Como um exemplo simples de força conservativa, consideremos o oscilador harmônico tridimensional. Usando (4.16) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= -k_x dx - k_y dy - k_z dz = \\ &= -d \left(\frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2 \right) , \end{aligned} \quad (4.54)$$

i.e., existe uma função cuja diferencial total é $-\mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$. De acordo com a discussão anterior, isso significa que a força dada por (4.16) é conservativa e que a ela podemos associar a energia potencial

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2 . \quad (4.55)$$

Notemos que no movimento unidimensional a conservação da energia mecânica, que afirma ser E constante na equação (4.53), é suficiente para determinar o movimento quando é dada a energia potencial. Já no movimento multidimensional apenas a equação que expressa a conservação da energia mecânica, em geral, é insuficiente para determinar o movimento.

Agora, consideremos uma força resultante \mathbf{F} qualquer. Ela pode ser escrita como a soma de duas componentes, uma componente \mathbf{F}_c conservativa e uma componente \mathbf{F}_{nc} não-conservativa,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{nc} , \quad (4.56)$$

sendo as componentes dadas pelas respectivas funções-força,

$$\mathbf{F}_c = \mathcal{F}_c(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{nc} = \mathcal{F}_{nc}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) .$$

Seja U uma energia potencial da força conservativa,

$$\mathbf{F}_c = -\nabla U(\mathbf{r}) . \quad (4.57)$$

Obtemos, a partir do teorema do trabalho e energia cinética (4.37),

$$\left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 + U(\mathbf{r}_2) \right] - \left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 + U(\mathbf{r}_1) \right] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}_{nc}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v} dt . \quad (4.58)$$

Derivando essa expressão em relação a t_2 obtemos que, a cada instante,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) \right] = \mathbf{F}_{nc} \cdot \mathbf{v} , \quad (4.59)$$

Esse resultado pode ser obtido direta e rapidamente a partir de (4.35) e usando (4.56) e (4.57),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) &= \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_{nc} \cdot \mathbf{v} = -(\nabla V) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_{nc} \cdot \mathbf{v} \\ &= -\frac{d}{dt} U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{nc} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

que é equivalente a (4.59). Se $\mathbf{F}_{nc} = \mathbf{0}$ reobtemos de (4.59) o teorema da conservação da energia mecânica. Chamaremos energia mecânica a soma da energia cinética com a energia potencial associada à componente conservativa da força resultante, mesmo quando houver a outra componente não-conservativa.

4.4 Partícula em campo eletromagnético

A força eletromagnética sobre uma partícula de carga q é dada por

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (4.61)$$

(em unidades gaussianas), sendo \mathbf{E} e \mathbf{B} os campos elétrico e magnético, respectivamente. A fórmula (4.61) é chamada **lei de força de Lorentz**. Na força eletromagnética, $q \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ é chamada **força elétrica** e $(q\dot{\mathbf{r}}/c) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, **força magnética**. Obviamente, a força elétrica tem sempre a direção do campo elétrico. Já a força magnética, por seu caráter de produto vetorial, é sempre perpendicular à velocidade da partícula e ao campo magnético. Sendo perpendicular à velocidade, não fornece potência à partícula, ou seja, não realiza trabalho sobre ela.

Se a massa da partícula é m e (4.61) é a força resultante sobre ela, temos pela Segunda Lei de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (4.62)$$

Multiplicando-se os dois membros de (4.62) por $\dot{\mathbf{r}}$, obtemos,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (4.63)$$

i.e., a variação da energia cinética deve-se apenas à potência fornecida pela força elétrica. Se, além disso, o campo elétrico depende apenas da posição e a força elétrica $q\mathbf{E}$ é conservativa, temos uma energia potencial U associada a ela, de modo que

$$q \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (4.64)$$

e a energia mecânica $T + U$ é conservada. Definindo o **potencial elétrico** Φ como sendo a essa energia potencial por unidade de carga,

$$V(\mathbf{r}) := \frac{U(\mathbf{r})}{q} \quad (4.65)$$

obtemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (4.66)$$

e

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + qV(\mathbf{r}) \quad (4.67)$$

é constante durante o movimento.

A solução da equação de movimento (4.62) pode ser bastante difícil. Consideremos o caso particular em que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são uniformes e constantes. Nesse caso (4.62) assume a forma

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \quad (4.68)$$

ou

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad (4.69)$$

onde usamos as definições dos seguintes vetores constantes:

$$\mathbf{a} := \frac{q\mathbf{E}}{m} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} := -\frac{q\mathbf{B}}{mc}. \quad (4.70)$$

Vamos escolher o plano OYZ na jazitura de \mathbf{E} e \mathbf{B} e o eixo OZ na direção de \mathbf{B} . Com isso, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{E} = E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}}$; temos pelas definições (4.70) que $\boldsymbol{\omega} = -\omega\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{a} = a_y\hat{\mathbf{y}} + a_z\hat{\mathbf{z}}$, onde $\omega = qB/mc$, $a_y = qE_y/m$ e $a_z = qE_z/m$. Assim, (4.69) é equivalente às três equações

$$\ddot{x} - \omega\dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + \omega\dot{x} = a_y \quad \text{e} \quad \ddot{z} = a_z \quad (4.71)$$

Sejam as condições iniciais dadas pela posição $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}} + z_0\hat{\mathbf{z}}$ e velocidade $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathbf{x}} + v_{0y}\hat{\mathbf{y}} + v_{0z}\hat{\mathbf{z}}$ no instante $t = 0$. Da terceira equação de (4.71), obtemos, imediatamente,

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2, \quad (4.72)$$

Nas primeira e segunda equações de (4.71), os sinais mais e menos sugerem o uso da variável

$$\xi := x + iy \quad (4.73)$$

para resolvê-las simultaneamente. Temos, com efeito, que a primeira e a segunda equações de (4.71) são equivalentes à equação

$$\ddot{\xi} + i\omega\dot{\xi} = ia_y \quad (4.74)$$

Sendo constante o termo livre dessa equação linear, é fácil obter a solução particular $a_y t/\omega$. Procurando soluções da homogênea associada na forma exponencial $e^{\alpha t}$ encontramos $\alpha = 0$ ou $\alpha = -i\omega$. Portanto, a solução geral de (4.74) é

$$\xi = \tilde{C} + \tilde{A}e^{-i\omega t} + \frac{a_y}{\omega}t, \quad (4.75)$$

onde \tilde{C} e \tilde{A} são duas constantes complexas. Se escrevermos essas constantes na forma $\tilde{C} = C_x + iC_y$ e $\tilde{A} = A e^{i(\pi/2) - \theta}$ ($C_x, C_y, A, \theta \in \mathbb{R}$), e usarmos (4.73), obtemos as expressões

$$x = C_x + A \sin(\omega t + \theta) + \frac{a_y}{\omega} t \quad \text{e} \quad (4.76)$$

$$y = C_y + A \cos(\omega t + \theta), \quad (4.77)$$

nas quais as quatro constantes C_x, C_y, A e θ são determinadas pelos valores iniciais x_0, y_0, v_{0x} e v_{0y} (os valores iniciais z_0 e v_{0z} já foram usados em (4.72)). As equações (4.76), (4.77) e (4.72) dão o movimento da partícula no campo eletromagnético constante e uniforme. Obtemos que o movimento ao longo do eixo OZ é uniformemente variado com aceleração constante qE_z/m . Já o movimento no plano OXY é a superposição de um movimento circular uniforme no sentido horário, de frequência $\omega = qB/mc$, com um movimento uniforme na direção OX com velocidade $v_a = a_y/\omega$, *i.e.*, com velocidade

$$v_a := \frac{E_y}{B} c \quad (4.78)$$

Este movimento uniforme é dito de **arraste** e a velocidade $\mathbf{v}_a = v_a \hat{\mathbf{x}}$ é chamada **velocidade de arraste**. É intrigante que o movimento de arraste se processe exatamente na direção perpendicular ao campo elétrico, como fica manifesto na expressão

$$\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c. \quad (4.79)$$

Se o campo elétrico é nulo e $v_{0z} = 0$ o movimento da partícula é circular uniforme. É importante notar que ele ocorre com uma velocidade angular $\omega = qB/mc$ que independe das condições iniciais; essa frequência angular ω é chamada **frequência de ciclotron** da partícula no campo magnético em questão. Usando a força centrípeta $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ desse movimento circular determinamos o raio r do movimento por meio da igualdade $m v^2/r = qvB/c$, da qual obtemos

$$r = \frac{mc v}{qB}. \quad (4.80)$$

Se o campo elétrico é nulo, mas $v_{0z} \neq 0$, o movimento é helicoidal; sua trajetória é uma hélice de passo $2\pi mc v_{z0}/qB$ e raio $r = mc v_{\perp}/qB$, no qual v_{\perp} é o módulo da componente da velocidade perpendicular ao campo magnético.

É interessante obter o movimento helicoidal da partícula no campo magnético usando métodos puramente vetoriais. Temos, a partir da equação (4.69), com $\mathbf{a} = 0$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (4.81)$$

Consequentemente $\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ é um vetor constante \mathbf{C} que, de acordo com as condições iniciais, é dado por $\mathbf{C} = \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$. Seja $\mathbf{v}_{0\parallel}$ a componente vetorial de \mathbf{v}_0 ao longo de $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_{0\perp}$ a componente perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$; temos, então, $\mathbf{C} = \mathbf{v}_{0\parallel} + \mathbf{v}_{0\perp} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$. Por uma escolha judiciosa da origem O , podemos fazer com que $\mathbf{v}_{0\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$. Com efeito, é possível escolher O no plano perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ e que passa pelo ponto P_0 ocupado

pela partícula no instante inicial; nesse caso, temos $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_0 = 0$ e a equação $\mathbf{v}_{0\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$ tem a solução $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_{0\perp} \times \boldsymbol{\omega} / \omega^2$. Portanto, para que tenhamos $\mathbf{v}_{0\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$ basta escolher $O = P_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0) / \omega^2$. Nesse caso, obtemos de (4.81)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{0\parallel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (4.82)$$

Decompondo também \mathbf{v} em uma componente \mathbf{v}_\perp perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ e uma componente \mathbf{v}_\parallel paralela a $\boldsymbol{\omega}$, obtemos que (4.82) é equivalente ao par de equações

$$\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v}_{0\parallel} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_\perp = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\perp , \quad (4.83)$$

onde \mathbf{r}_\perp é a componente de \mathbf{r} perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$. A primeira equação afirma que o movimento na direção de $\boldsymbol{\omega}$ é uniforme. Na segunda equação em (4.83) temos que $\mathbf{v}_\perp = \dot{\mathbf{r}}_\perp$ e podemos escrevê-la como

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\perp , \quad (4.84)$$

donde concluímos que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_\perp^2 = 2\mathbf{r}_\perp \cdot \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt} = 2\mathbf{r}_\perp \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\perp = \mathbf{0} , \quad (4.85)$$

i.e., $|\mathbf{r}_\perp|$ é constante. Portanto o movimento no plano ortogonal a $\boldsymbol{\omega}$ é circular. Além disso \mathbf{v}_\perp é constante, pois $\mathbf{v}_\perp^2 = v^2 - v_\parallel^2$ e tanto o módulo v , quanto a velocidade \mathbf{v}_\parallel , são constantes. De fato, v é constante porque a força magnética não realiza trabalho e \mathbf{v}_\parallel é constante em virtude da primeira equação (4.83). Conseqüentemente, no plano perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$, o movimento é circular uniforme; compondo-o com o movimento uniforme ao longo de $\boldsymbol{\omega}$ obtemos o movimento helicoidal.

4.5 Movimento sob força central

Dizemos que \mathbf{F} é uma **força central** se ela satisfaz duas propriedades específicas. A primeira, é que sua direção é sempre a da reta que passa pelo seu ponto de aplicação e por um ponto fixo no espaço; tal ponto fixo é chamado **centro de força** da força central. A segunda, é que o módulo da força é uma função apenas da distância entre seu ponto de aplicação e o centro de força. Vamos usar um sistema de eixos coordenados com origem O no centro de força, de modo que a expressão de uma força central \mathbf{F} seja

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) = \mathcal{F}(r)\hat{\mathbf{r}} . \quad (4.86)$$

Desse modo, uma força central só tem componente radial, que denotamos por $\mathcal{F}(r)$; quando $\mathcal{F}(r) < 0$ a força é dita **atractiva**, pois atrai a partícula para o centro e quando $\mathcal{F}(r) > 0$ a força é dita **repulsiva**, pois repele a partícula do centro. Também podemos chamar a força atrativa **centrípeta** e a repulsiva, **centrífuga**.

Toda força central é conservativa pois $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = dr$ nos leva a

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{F}(r)dr = d \int_{r_p}^r \mathcal{F}(r')dr' , \quad (4.87)$$

onde r_p é a distância entre o centro e um ponto fixo arbitrário. Conseqüentemente, podemos associar a cada força central \mathbf{F} uma energia potencial

$$U(r) = \int_r^{r_p} F(r') dr' . \quad (4.88)$$

Temos, também, que toda força central produz torque zero, se tomarmos o centro de força como ponto base, pois $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathcal{F}(r)\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$. Portanto, se tal força central é a resultante, o momento angular da partícula é conservado.

Os movimentos de uma partícula sob ação de uma força resultante central são dados pela Segunda Lei de Newton na forma

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathcal{F}(r)\hat{\mathbf{r}} . \quad (4.89)$$

Temos, então, que o momento angular \mathbf{L} da partícula em relação ao centro é conservado. Conseqüentemente, a partícula se move em um plano perpendicular a \mathbf{L} (em uma reta se $\mathbf{L} = 0$). Esse movimento bidimensional sofre duas restrições, uma proveniente da constância de $|\mathbf{L}|$, que exige que \mathbf{r} varra áreas iguais em tempos iguais, e a outra proveniente da constância da energia, já que a força central é conservativa. Veremos que essas duas leis de conservação, do momento angular e da energia, são suficientes para determinar o movimento da partícula a partir da condição inicial.

Para estudar o movimento da partícula sob a ação da força central é natural usarmos coordenadas polares r e θ no plano do movimento. Naturalmente, r é a distância da partícula ao centro de força e θ é o ângulo polar com vértice nesse centro; podemos chamá-lo **ângulo polar varrido pela partícula**. Usando essas coordenadas, o movimento plano da partícula passa a ser dado como a superposição de um movimento radial, descrito pela coordenada r e um movimento angular, descrito pela coordenada θ . Temos, então, $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ e $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$. Usando essa expressão da aceleração na Segunda Lei de Newton (4.89), obtemos

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \mathcal{F}(r) \quad \text{e} \quad mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0 . \quad (4.90)$$

Essa última equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (4.91)$$

que é simplesmente a afirmação de que o módulo do momento angular é constante, pois $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = mr\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta}$. O valor constante de L é dado pelas condições iniciais. Obtemos, então, da segunda equação em (4.90),

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} . \quad (4.92)$$

Esta equação mostra que a partícula jamais muda seu sentido de rotação em torno do centro de força, pois $\dot{\theta}$ não pode mudar de sinal em (4.92). Além disso, a rotação torna-se mais lenta à medida que nos afastamos do centro; mais precisamente: a velocidade angular cai com o quadrado da distância ao centro. Usando (4.92) para eliminar $\dot{\theta}$ da primeira equação de (4.90), obtemos

$$m\ddot{r} = \mathcal{F}(r) + \frac{L^2}{mr^3} . \quad (4.93)$$

Essa equação de movimento é equivalente à equação de um movimento unidimensional sob uma força resultante

$$\mathcal{F}_{ef}(r) := \mathcal{F}(r) + \frac{L^2}{mr^3}. \quad (4.94)$$

Chamamos $\mathcal{F}_{ef}(r)$ **força efetiva** no movimento radial da partícula. Sendo ela uma função apenas da variável de posição r , o problema unidimensional é solúvel e a solução $r(t)$ de (4.93) pode ser substituída em (4.92) para determinar $\theta(t)$. Desse modo, o problema do movimento sob força central fica totalmente resolvido. A seguir, apresentaremos explicitamente a solução usando a conservação da energia.

Usando (4.88), temos $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(r) = -\hat{\mathbf{r}} dU(r)/dr$ e, conseqüentemente,

$$\mathcal{F}(r) = -\frac{dU(r)}{dr}. \quad (4.95)$$

Além disso $L^2/mr^3 = -d(L^2/2mr^2)/dr$. Portanto, a força efetiva (4.94) é dada por

$$\mathcal{F}_{ef}(r) = -\frac{dU_{ef}(r)}{dr}, \quad (4.96)$$

onde a função U_{ef} é definida por

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (4.97)$$

e é chamada **energia potencial efetiva** no movimento radial da partícula. Temos, pois, pelo teorema de conservação da energia,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef}(r), \quad (4.98)$$

com a constante E dada em termos da condição inicial. Obtemos, então,

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - U_{ef}(r')}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}}t, \quad (4.99)$$

onde r_0 é a distância entre a partícula e o centro de força no instante $t = 0$. Dessa equação obtemos a função que dá a distância ao centro em função do tempo, $r = r(t)$. Substituindo-a em (4.92), encontramos o ângulo polar varrido pela partícula em função do tempo,

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{L/m}{[r(t')]^2} dt', \quad (4.100)$$

onde θ_0 é o ângulo polar no instante $t = 0$. Desse modo, a solução completa do problema fica reduzida às duas quadraturas (4.99) e (4.100).

Podemos obter algumas informações sobre o movimento sem resolver as integrais (4.99) e (4.100). O termo L^2/mr^3 em (4.93) e (4.94) tem o efeito de uma **força centrífuga** no movimento radial da partícula (embora não seja uma força, mas o negativo do produto da massa pela componente angular da aceleração, que foi escrita no membro direito da equação (4.93)). A esse termo corresponde na energia potencial efetiva (4.97) o termo $L^2/2mr^2$, chamado **barreira centrífuga**. Dizemos que a

barreira centrífuga se opõe à aproximação da partícula do centro de força. Essa oposição desaparece com $L = 0$, mas para $L \neq 0$ impede a partícula de passar pelo centro (a menos, é claro, que $U(r)$ em (4.97) tenha um termo que vença a ação da barreira). Para uma dada energia E , o movimento da partícula se processa somente a distâncias do centro que satisfazem à condição $U_{ef}(r) \leq E$. Em pontos nos quais $U_{ef}(r) = E$ a velocidade **radial** da partícula é nula, embora a partícula tenha velocidade angular não nula se $L \neq 0$. A figura mostra um poço da energia potencial

Figura 4.3: Poço da energia potencial efetiva e o movimento da partícula.

efetiva e uma energia E que permite à partícula mover-se entre uma distância mínima e uma máxima do centro O , que denotamos por r_P e r_A , respectivamente. Um ponto da trajetória de distância mínima é chamado **pericentro** e um de distância máxima, **apocentro**. O mínimo da energia potencial efetiva no poço ocorre à distância que denotamos por r_0 , na qual a partícula tem velocidade **radial** máxima. A velocidade angular máxima ocorre no pericentro e a mínima no apocentro. Se a energia da partícula for exatamente igual $U_{ef}(r_0)$, ela move-se em uma trajetória circular de raio r_0 , com velocidade L/mr_0 . Se a energia da partícula for ligeiramente superior a $U_{ef}(r_0)$, ela move-se com pequenas oscilações radiais em torno de $r = r_0$. Se $U''_{ef}(r_0) \neq 0$ então as oscilações radiais são harmônicas com frequência

$$\omega_r := \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 U_{ef}(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0}}. \quad (4.101)$$

Se os valores da energia potencial efetiva e da energia da partícula restringem o movimento da partícula de tal modo que r varie de um mínimo r_P a um máximo r_A , então r varia periodicamente com um período τ_r que é obtido de (4.99) e dado por

$$\tau_r = \sqrt{2m} \int_{r_P}^{r_A} \frac{dr'}{\sqrt{E - U_{ef}(r')}}. \quad (4.102)$$

O movimento radial tem portanto uma frequência angular

$$\omega_r = \frac{2\pi}{\tau_r}, \quad (4.103)$$

com τ_r dado por (4.102). Um movimento radial periódico não significa forçosamente que o movimento da partícula seja periódico. Para que o movimento da partícula seja periódico é necessário que a razão entre o período de revolução τ e o período de oscilação radial τ_r seja um número racional; nesse caso a trajetória da partícula é uma curva fechada. Se, além disso, a razão τ/τ_r for um número inteiro então a trajetória da partícula é uma curva fechada simples; nesse caso a área do interior da trajetória é igual à área varrida durante um período de revolução que, em virtude da conservação de L , é dada por $L\tau/2m$. Temos então a seguinte relação entre a área da órbita A_{orb} e o período de revolução:

$$A_{orb} = \frac{L}{2m} \tau. \quad (4.104)$$

Em contrapartida, se o movimento da partícula é ilimitado, a órbita se estende a distâncias infinitas do centro, podendo ou não dar uma ou mais revoluções quando $r \rightarrow \infty$, dependendo da taxa de variação de r em relação a θ .

Agora, consideremos um método alternativo para determinar o movimento da partícula sob força central. Ao invés de determinar $r(t)$ e $\theta(t)$ por meio de (4.99) e (4.100), vamos determinar primeiro a trajetória $r(\theta)$ da partícula e, então, determinar o seu movimento $\theta(t)$ nessa trajetória. Para obter a trajetória começamos por usar (4.92) para eliminar derivadas em relação ao tempo em favor de derivadas em relação a θ ,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta}, \quad (4.105)$$

donde obtemos

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{m^2 r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2. \quad (4.106)$$

Usando (4.106) em (4.93), obtemos a equação diferencial da órbita,

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r + \frac{mr^4}{L^2} \mathcal{F}(r). \quad (4.107)$$

A mudança da variável r para a variável

$$u := \frac{1}{r} \quad (4.108)$$

elimina de (4.107) o termo com a derivada primeira, $(dr/d\theta)^2$, e simplifica a equação da órbita. Obtemos, a partir de (4.107) a seguinte equação diferencial da órbita

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2} \mathcal{F}\left(\frac{1}{u}\right). \quad (4.109)$$

Essa equação é obtida diretamente de (4.93) trocando-se, conjuntamente, as variáveis r e t por u e θ . As soluções $u(\theta) = 1/r(\theta)$ dessa equação dão as órbitas possíveis da partícula sob a ação da força central em consideração. De posse de uma órbita possível $r(\theta)$, podemos usá-la em (4.92) para obter

$$\int_{\theta_0}^{\theta} [r(\theta')]^2 d\theta' = \frac{L}{m} t. \quad (4.110)$$

que dá, implicitamente, a solução $\theta(t)$ obtida em (4.100).

4.6 Força central inversamente proporcional ao quadrado da distância

Em continuação ao assunto da seção anterior, consideremos o caso particular importante em que a força central é inversamente proporcional ao quadrado da distância, *i.e.*,

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.111)$$

onde κ é a constante de proporcionalidade. Se κ é negativa a força é atrativa e se κ é positiva, ela é repulsiva. Temos a seguinte energia potencial associada a (4.111)

$$U(r) = \frac{\kappa}{r}, \quad (4.112)$$

onde o ponto padrão foi tomado a distância infinita da origem. A energia potencial efetiva é dada por

$$U_{ef}(r) = \frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (4.113)$$

Para determinar os pontos de retorno do movimento radial resolvemos a equação $U_{ef}(r) = E$, *i.e.*, a seguinte equação de segundo grau para $1/r$:

$$\frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \kappa \left(\frac{1}{r}\right) - E = 0. \quad (4.114)$$

Se $L = 0$ temos um movimento retilíneo e uma única raiz dada por κ/E . Se a força é repulsiva ($\kappa > 0$) o movimento só é possível se $E > 0$ e κ/E é um ponto de máxima aproximação. Se a força é atrativa ($\kappa < 0$) o movimento tem ponto de retorno em

Figura 4.4: Ponto de retorno no movimento com momento angular nulo.

κ/E se $E < 0$ e neste caso é um ponto de máximo afastamento; se $E \geq 0$ não há ponto de retorno e o movimento estende-se a distâncias infinitas. Passemos ao caso de maior interesse, no qual $L \neq 0$ e o movimento é bidimensional. Nesse caso, as raízes de (4.114) são

$$\frac{1}{r} = -\frac{m\kappa}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{m\kappa}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}. \quad (4.115)$$

Se não há força ($\kappa = 0$) a partícula tem movimento retilíneo e passa a uma distância mínima do centro igual a $L/\sqrt{2mE}$. Deixemos esse caso de lado e consideremos a situação em que há força, *i.e.*, em que $\kappa > 0$ ou $\kappa < 0$.

Se a força é repulsiva ($\kappa > 0$) (4.115) tem uma única raiz positiva quando $E > 0$, que corresponde a um ponto de máxima aproximação dado por

$$\frac{1}{r_P} = \sqrt{\left(\frac{m\kappa}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} - \frac{m\kappa}{L^2} \quad (\kappa > 0, E > 0). \quad (4.116)$$

Se a força é atrativa ($\kappa < 0$) a energia potencial efetiva (4.113) tem um único mínimo em

$$r_0 = \frac{L^2}{m|\kappa|}, \quad (4.117)$$

igual a

$$U_{ef}(r_0) = -\frac{1}{2}m\left(\frac{\kappa}{L}\right)^2. \quad (4.118)$$

Quando $r \rightarrow 0$ a barreira centrífuga é predominante e $U_{ef}(r) \rightarrow +\infty$; quando $r \rightarrow \infty$ a força atrativa é predominante e $U_{ef}(r) \rightarrow 0$ por valores negativos, conforme mostra a figura.

Figura 4.5: Ponto de retorno nos casos repulsivo e atrativo com momento angular diferente de zero.

Nesse caso de força atrativa, se a energia é positiva (4.115) tem uma única raiz positiva, que corresponde ao ponto de máxima aproximação, dado por

$$\frac{1}{r_P} = \frac{m|\kappa|}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{m|\kappa|}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \quad (\kappa < 0, E > 0). \quad (4.119)$$

Se a energia é nula há uma única raiz que também corresponde a um ponto de máxima aproximação, dado por

$$\frac{1}{r_P} = \frac{2m|\kappa|}{L^2} = \frac{2}{r_0} \quad (\kappa < 0, E = 0). \quad (4.120)$$

Finalmente, se a energia é negativa, porém maior que o mínimo $U_{ef}(r_0)$, (4.115) tem duas raízes positivas que correspondem aos pontos de máxima aproximação e máximo afastamento, dados por

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_P} &= \frac{m|\kappa|}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{m|\kappa|}{L^2}\right)^2 - \frac{2m|E|}{L^2}} \quad \text{e} \\ \frac{1}{r_A} &= \frac{m|\kappa|}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{m|\kappa|}{L^2}\right)^2 - \frac{2m|E|}{L^2}} \quad (\kappa < 0, E < 0), \end{aligned} \quad (4.121)$$

respectivamente.

Figura 4.6: A aproximação é maior no caso atrativo do que no repulsivo.

Nesse último caso, em que a partícula se move com energia negativa no poço da energia potencial atrativa, o seu movimento radial se processa no intervalo $[r_P; r_A]$ com extremos dados por (4.121). Já no caso em que a energia é positiva o movimento é ilimitado, quer a força seja repulsiva, quer seja atrativa; (4.116) e (4.119) mostram que a partícula aproxima-se mais do centro no caso atrativo. Esta maior aproximação no caso atrativo é um resultado intuitivo que está ilustrado na figura.

Agora, vamos determinar a trajetória da partícula a partir de (4.109), que no caso da força inversamente proporcional ao quadrado da distância, (4.112), assume a forma

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m\kappa}{L^2}, \quad (4.122)$$

cuja solução é dada por

$$\frac{1}{r} = -\frac{m\kappa}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0), \quad (4.123)$$

onde A e θ_0 são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais. A constante A pode ser considerada não negativa, pois θ_0 pode ser redefinido para garantir a positividade do coeficiente do cosseno. A órbita é simétrica em relação ao eixo $\theta = \theta_0$. Para uma dada órbita podemos escolher o eixo polar como sendo um eixo de simetria e, com isso, fazemos $\theta_0 = 0$ ou π . A maneira mais simples de relacionar A com as condições iniciais (por meio de L e E) consiste em obter os pontos de retorno do movimento radial a partir da órbita (4.123) e compará-los com (4.115). Temos que os pontos de retorno são definidos pela condição $dr/dt = 0$, ou equivalentemente, por $d(1/r)/dt = 0$. Tal condição é equivalente a $\sin(\theta - \theta_0) = 0$ na equação (4.123), i.e., a $\cos(\theta - \theta_0) = \pm 1$. Portanto, os pontos de retorno em (4.123) são dados por

$$\frac{1}{r} = -\frac{m\kappa}{L^2} \pm A, \quad (4.124)$$

que comparados com (4.115), nos dão

$$A = \sqrt{\left(\frac{m\kappa}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}. \quad (4.125)$$

Substituindo essa expressão para A em (4.123), obtemos

$$\frac{|L^2/m\kappa|}{r} = -\text{sgn}(\kappa) + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\kappa^2}} \cos(\theta - \theta_0), \quad (4.126)$$

que é a equação de uma cônica de excentricidade

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\kappa^2}} \quad (4.127)$$

e *semilatus rectum*

$$l = \left| \frac{L^2}{m\kappa} \right|. \quad (4.128)$$

Se a energia é positiva, temos $\varepsilon > 1$ e (4.126) dá dois ramos de uma hipérbole, o ramo próximo ao centro se $\text{sgn}(\kappa) = -1$, *i.e.*, se a força é atrativa, e o ramo distante do centro se $\text{sgn}(\kappa) = 1$, *i.e.*, se a força é repulsiva. Se a energia não é positiva a força deve ser atrativa e (4.126) descreve uma parábola se $E = 0$ ($\varepsilon = 1$) ou uma elipse se $E < 0$ ($\varepsilon < 1$). Quando E tem o valor mínimo $U_{ef}(r_0)$, dado por (4.118), temos $\varepsilon = 0$ e (4.126) descreve uma circunferência de raio igual ao *semilatus rectum* (4.128).

4.7 Problema de Kepler

O problema de Kepler consiste em obter as leis de Kepler do movimento planetário a partir da lei de gravitação de Newton. Em sentido lato, o problema de Kepler consiste em obter o movimento de uma partícula sob a ação de uma força central, atrativa e inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro de força. Nesta seção resolveremos o problema de Kepler sem fazermos muitos cálculos, pois usaremos resultados obtidos anteriormente no estudo de forças centrais.

Consideremos o Sol como imóvel em relação às estrelas fixas e usemos como referencial inercial o copernicano. Um planeta de massa m sofre uma força gravitacional do Sol dada por

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM_\odot}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.129)$$

na qual r e $\hat{\mathbf{r}}$ são o módulo e o unitário do vetor-posição \mathbf{r} do planeta em relação ao Sol e M_\odot é a massa do Sol. Essa é uma força central da forma (4.112) com

$$\kappa = -GmM_\odot. \quad (4.130)$$

Consideremos desprezíveis todas as outras forças que agem sobre o planeta. Sendo a força gravitacional central, obtemos que o momento angular do planeta em relação à origem no Sol é conservado. Obtemos então que o planeta move-se em uma órbita plana e seu vetor-posição varre áreas iguais em tempos iguais; essa é a Segunda Lei

de Kepler. Sendo a força gravitacional inversamente proporcional ao quadrado da distância, temos que a órbita do planeta deve ser uma cônica. Como as órbitas planetárias não se estendem ao infinito, como hipérbolas e parábolas, concluímos que ela é uma elipse com o Sol em um dos focos; esta é a Primeira Lei de Kepler. Sendo a órbita elíptica uma curva simples, temos que o período de revolução τ do planeta relaciona-se com a área da órbita pela equação (4.104). Sabendo-se que a área de elipse é dada por $\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, de acordo com (A1.9) e (A1.5), obtemos de (4.104)

$$\tau = \frac{2m}{L} \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (4.131)$$

No caso de uma elipse a energia E é negativa e a excentricidade (4.127) é dada por $\varepsilon = \sqrt{1 - (2|E|L^2/m\kappa^2)}$. Substituindo essa expressão em (4.131) obtemos

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi^2 \kappa^2 m}{2|E|^3}}. \quad (4.132)$$

Mas o semi-eixo maior a é dado em função do *semi-latus rectum* por (A1.12), *i.e.*, $a = l/(1 - \varepsilon^2)$; usando nessa expressão as expressões (4.127) e (4.128) para a excentricidade e o *semi-latus rectum* no caso da elipse, obtemos

$$a = \left| \frac{\kappa}{2E} \right|. \quad (4.133)$$

Com essa expressão podemos eliminar E de (4.132) e obter

$$\tau^2 = 4\pi^2 \left| \frac{m}{\kappa} \right| a^3. \quad (4.134)$$

Finalmente, usamos o fato crucial de que a constante κ no caso gravitacional é proporcional à massa m do planeta, de acordo com (4.130), que substituída em (4.134) dá

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3. \quad (4.135)$$

Essa equação afirma que nas órbitas planetárias a razão entre o quadrado do período de revolução e o cubo do semi-eixo maior tem o mesmo valor para todos os planetas; essa é a Terceira Lei de Kepler. Com isso, fica completamente resolvido o problema de Kepler do movimento planetário.

4.8 Seção de choque e problema de Rutherford

Nesta seção consideramos um tipo de processo de interação entre partículas chamado espalhamento. Nele, partículas que são livres quando suficientemente separadas, são arremessadas de modo a se aproximarem, interagirem e separarem-se até tornarem-se, novamente, partículas livres. Pela maneira como a direção do movimento final de cada partícula se desvia da direção de seu movimento inicial, obtém-se informações sobre as forças de interação entre as partículas. Normalmente, a mudança de direção de um

movimento retilíneo para outro é relativamente fácil de ser observada. Em contrapartida, as forças de interação que se manifestam apenas a pequenas distâncias são de difícil observação e para estudá-las os processos de espalhamento são particularmente úteis. Os resultados de espalhamentos são imprescindíveis na investigação de interações entre corpos microscópicos, como, por exemplo, átomos e moléculas. Nesse caso, contudo, a descrição rigorosa do espalhamento requer a Mecânica Quântica; ainda assim podemos usar a Mecânica Clássica com cautela, pois ela pode levar a resultados surpreendentemente precisos ou servir como um estudo preliminar do espalhamento.

Nesta seção, estudaremos uma forma bem simples de espalhamento, no qual partículas, denominadas projéteis, são lançadas contra outras que se encontram originalmente em repouso e são chamadas alvos; além disso, vamos considerar que os alvos permanecem em repouso durante o espalhamento, de modo que o problema se reduz ao estudo dos movimentos dos projéteis.

Consideremos uma partícula de massa m sob a ação de uma força que depende da distância da partícula até um ponto fixo que chamaremos **centro de força** e tomaremos como origem O do sistema de coordenadas. Façamos a hipótese de que a distâncias suficientemente grandes do centro de força a partícula encontra-se livre, i.e., sua velocidade é constante; teoricamente, muitas vezes as distâncias devem ser infinitas para que essa hipótese se cumpra. Essas situações em que a partícula se encontra livre são chamadas **estados assintóticos** da partícula.

Suponhamos que a partícula esteja inicialmente em um estado assintótico, se aproxime do centro de força, seja desviada pela força da direção do movimento assintótico inicial, e se afaste do centro de força entrando novamente em outro estado assintótico. A passagem da partícula do estado assintótico inicial para o estado assintótico final é chamada **espalhamento da partícula pela força** em consideração ou, abreviadamente, **espalhamento pelo centro de força**. Os estados assintóticos inicial e final também são denominados **estados inicial e final do espalhamento**. A força que provoca o espalhamento é chamada nesse contexto **força de espalhamento** e o centro de força, **centro de espalhamento**. é comum que o centro espalhamento seja a posição da partícula alvo imóvel. O ângulo que a velocidade da partícula no estado assintótico final faz com a velocidade da partícula no estado assintótico inicial, que denotamos por Θ , é chamado **ângulo de espalhamento**.

Em problemas concretos, é comum estarmos interessados não no espalhamento de uma única partícula, mas nos espalhamento das diversas partículas de um feixe de partículas idênticas, todas em estados assintóticos iniciais com a mesma velocidade e distribuídas uniformemente na seção reta do feixe. Esse feixe incide sobre o centro de força e suas partículas são espalhadas. Consideremos que esse **feixe incidente** tem N partículas, com velocidades iguais a \mathbf{v}_0 , e que a área de sua seção reta é A . Seja dN o número de partículas desse feixe que foram espalhadas entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$; elas formam o chamado **feixe espalhado** no ângulo sólido entre Θ e $\Theta + d\Theta$. A área da seção reta do feixe incidente da qual saíram essas dN partículas é dada por $A(dN/N)$. Chamamos essa área **seção de choque** para o espalhamento entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$ e a denotamos por $d\sigma$,

Figura 4.7: Espalhamento de uma partícula pelo centro de força O .

$$d\sigma = \frac{dN}{N} A. \quad (4.136)$$

Podemos interpretar a seção de choque $d\sigma$ como a área, no plano ortogonal ao feixe, que a força de espalhamento oferece para partículas a serem espalhadas entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$; também dizemos que $d\sigma$ é a área oferecida pelo centro de força. Observemos que a seção de choque é um conceito associado à força de espalhamento em consideração.

Consideremos a situação em que existem N_a centros de força, oferecidos como alvos para o feixe incidente, e que cada centro de força espalha as partículas independentemente da presença dos outros. Nesse caso, se dN é o número de partículas do feixe incidente espalhadas entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$, então o número espalhado entre esses ângulos por cada centro de força é dN/N_a . Nesse caso, continuamos definindo seção de choque $d\sigma$ como a área oferecida por cada centro de força, isto é, como a quantidade

$$d\sigma = \frac{dN/N_a}{N} A. \quad (4.137)$$

Obviamente, quando há um único centro de força, $N_a = 1$ e (4.137) reduz-se a (4.136).

A relação (4.137) pode ser escrita de outras maneiras úteis. Por exemplo, definindo n_a como o número de centros de espalhamento por unidade de área do alvo,

$$n_a = \frac{N_a}{A}, \quad (4.138)$$

Figura 4.8: Partículas de uma área $d\sigma$ da seção reta se espalham entre os ângulos Ω e $\Omega + d\Omega$.

podemos escrever (??) na forma

$$\frac{dN}{N} = n_a d\sigma . \quad (4.139)$$

Para uma outra maneira útil de definir seção de choque, consideremos os espalhamentos ocorridos durante um intervalo de tempo T e defininamos **luminosidade** \mathcal{L} do feixe incidente como sendo o número de partículas incidentes que atravessam uma seção reta do feixe por unidade de área e por unidade de tempo,

$$\mathcal{L} := \frac{N}{AT} . \quad (4.140)$$

Usando esse conceito de luminosidade podemos escrever (4.137) na forma

$$d\sigma = \frac{1}{N_a} \frac{dN/T}{\mathcal{L}} , \quad (4.141)$$

i.e., a seção de choque para espalhamentos entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$ é a taxa temporal com que partículas são espalhadas entre esses ângulos, por unidade de luminosidade do feixe incidente e por unidade de centro espalhador no alvo. É útil tomar a expressão (4.141) como definição de seção de choque, pois ela prescindir de qualquer referência às partículas do feixe incidente que serão espalhadas dentro do ângulo sólido considerado.

Definimos a seção total de choque como sendo a integral da seção de choque para todos os ângulos de espalhamento; denotando-a por σ , temos

$$\sigma = \int_{\Theta=0}^{\Theta=\pi} d\sigma . \quad (4.142)$$

Figura 4.9: O parâmetro de impacto \mathbf{b} é dado por $\Pi_{\mathbf{v}_0}\mathbf{r}_0$.

Naturalmente, a seção total é a área oferecida pelo centro de espalhamento a todas as partículas do feixe incidente que se espalham em algum ângulo.

Em Mecânica Newtoniana, o movimento de uma partícula é univocamente determinado pela condição inicial, constituída pela posição inicial \mathbf{r}_0 da partícula e sua velocidade inicial \mathbf{v}_0 . Em particular, para determinar a trajetória da partícula, a partir de seu estado assintótico inicial, é suficiente dar a velocidade inicial assintótica e a componente da posição inicial no plano perpendicular à direção de incidência; essa componente, dada por $\Pi_{\mathbf{v}_0}\mathbf{r}_0$, será denotada por \mathbf{b} . Temos, então, que \mathbf{v}_0 e \mathbf{b} determinam o ângulo de espalhamento Θ . Uma vez que no feixe incidente todas as partículas têm a mesma velocidade \mathbf{v}_0 , o ângulo de espalhamento varia apenas com \mathbf{b} . No caso em que a força tem simetria azimutal, em torno da reta que passa pelo centro de força na direção incidente, obtemos que Θ é função apenas do módulo b . Esse número b é chamado de **parâmetro de impacto** da partícula incidente e é igual à distância a que a partícula passaria do centro de força se não sofresse nenhum desvio, i.e., se permanecesse sempre no estado assintótico inicial. Nos referimos ao próprio vetor \mathbf{b} como vetor de parâmetro de impacto da partícula.

No caso de simetria azimutal temos, então, que Θ é uma função do parâmetro de impacto b e escrevemos $\Theta = \Theta(b)$. Vamos supor que tal função seja bijetora, de modo

que a cada possível ângulo de espalhamento Θ corresponda um único parâmetro de impacto b . Nesse caso, ao ângulo de espalhamento $\Theta + d\Theta$ corresponde também um único parâmetro de impacto $b+db$. Com isso, temos que as partículas que se espalham entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$ são as que têm parâmetro de impacto entre os valores b e $b + db$. Conseqüentemente, a área $d\sigma$ oferecida pelo alvo entre os parâmetros de impacto b e $b + db$ é

$$d\sigma = 2\pi b|db|. \quad (4.143)$$

Para relacionarmos essa seção de choque $d\sigma$ com o ângulo de espalhamento $d\Theta$, dividimos ambos os membros de (4.143) por $d\Theta$ e chegamos a

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi b \left| \frac{db}{d\Theta} \right|, \quad (4.144)$$

onde consideramos $d\Theta$ positivo e $db/d\Theta$ como a derivada da função $b = b(\Theta)$ (essa função é a inversa da função bijetora $\Theta = \Theta(b)$). Observemos que a seção de choque (4.144) também pode ser escrita por unidade do ângulo sólido $d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta$ que há entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|. \quad (4.145)$$

A relação (4.144) é a equação fundamental da teoria do espalhamento com simetria azimutal. Obtendo $d\sigma$ de (4.144) podemos usá-lo em (4.139), ou nas suas equivalentes, para obter a fração de partículas que se espalha nas proximidades de cada ângulo Θ .

As forças centrais tem simetria azimutal, de modo que (4.144) descreve o espalhamento que elas provocam. Elas também são conservativas, de modo que um espalhamento por força central pode ser totalmente caracterizado pela energia potencial da força; nesse caso ele costuma ser qualificado como um *bf* espalhamento potencial. Consideremos o espalhamento provocado por uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância, dada por (4.111). Cada partícula incidente tem velocidade assintótica \mathbf{v}_0 maior do que zero e, com isso, sua energia $E = mv_0^2/2$, puramente cinética, é positiva. Conseqüentemente, a trajetória das partículas no espalhamento são hipérbóles. As partículas têm estados assintóticos que se distinguem pelo parâmetro de impacto b , e desejamos então determinar b como função do ângulo de espalhamento no movimento hiperbólico, para calcular a seção de choque dada por (4.144). O ângulo de espalhamento Θ é dado por

$$\Theta = \pi - 2\alpha, \quad (4.146)$$

onde α é o ângulo que cada assíntota faz com o eixo da hipérbole. O parâmetro de impacto está relacionado com as características da trajetória e pode ser escrito em termos desse ângulo α e do *semilatus rectum* l da hipérbole,

$$b = l \cot \alpha. \quad (4.147)$$

Com efeito, na figura temos $b = \overline{OC} \operatorname{sen} \alpha$, onde a distância \overline{OC} entre o foco O e o cruzamento C das assíntotas é igual ao produto da excentricidade ε da hipérbole

Figura 4.10: Projétil com parâmetro de impacto b em trajetória hiperbólica.

pela distância a entre o cruzamento C das assíntotas e o vértice V da hipérbole, $\overline{OC} = \varepsilon a$; portanto, $b = a\varepsilon \sin \alpha$. Mas $\cos \alpha = 1/\varepsilon$ e $a = l/(\varepsilon^2 - 1) = l/\tan^2 \alpha$; logo $b = (l/\tan^2 \alpha)\varepsilon \sin \alpha$, que resulta em (4.147). Usando (4.146) em (4.147) obtemos

$$b = l \tan \frac{\Theta}{2} . \quad (4.148)$$

De acordo com (4.128) o semilatus rectum é dado por $L^2/(m|\kappa|)$, que em termos das condições iniciais b e v_0 , nos leva a

$$l = \frac{mv_0^2 b^2}{|\kappa|} . \quad (4.149)$$

Substituindo esse resultado em (4.148), obtemos, finalmente,

$$b = \frac{|\kappa|}{mv_0^2} \cot \frac{\Theta}{2} . \quad (4.150)$$

Agora, usamos essa relação em (4.144), para obter

$$d\sigma = \left(\frac{\kappa}{2mv_0^2} \right) \frac{2\pi \sin \Theta}{\sin^4(\Theta/2)} d\Theta . \quad (4.151)$$

Essa seção de choque, tal como em (4.145), pode ser escrita em termos do ângulo sólido $d\Omega$,

$$d\sigma = \left(\frac{\kappa}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^2(\Theta/2)} d\Omega . \quad (4.152)$$

No caso da força coulombiana temos

$$\kappa = q_1 q_2 , \quad (4.153)$$

onde q_1 é a carga da partícula incidente e q_2 a carga da partícula que está fixa no centro O e exerce a força central na partícula incidente. Nesse caso, a seção de choque (4.151) toma a forma

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{2mv_0^2} \right) \frac{2\pi \sin \Theta}{\sin^4(\Theta/2)} d\Theta . \quad (4.154)$$

Essa é a fórmula de Rutherford para o espalhamento coulombiano; o problema de obtê-la a partir da força coulombiana é chamado **problema de Rutherford**. Note-mos que a seção de choque para espalhamento em torno do ângulo nulo é infinita. Isso se deve ao alcance infinito da força coulombiana que provoca um desvio de trajetória, por pequeno que seja, para projéteis com parâmetros de impacto tão grande quanto se queira. Com isso, temos uma área de seção reta infinita no feixe incidente oferecida às partículas que se espalham nas vizinhanças da direção incidente. Um conseqüência dessa propriedade é que a seção total de choque no espalhamento coulombiano também é infinita.

Capítulo 5

Movimento de um sistema de Partículas

5.1 Introdução

Consideremos um sistema de N partículas, de massas m_1, m_2, \dots, m_N , cujo movimento em relação a um referencial inercial $\mathcal{R}ef$ estudaremos agora. Recordemos algumas definições e propriedades fundamentais de um tal sistema, apresentadas no capítulo 2, e desenvolvamos um pouco mais nossa notação para facilitar o seu estudo. Continuaremos a usar grandezas cinemáticas relativas à origem de $\mathcal{R}ef$. Como sabemos, qualquer afirmação em termos dessas grandezas pode ser reescrita em termos das correspondentes grandezas relativas a $\mathcal{R}ef$; basta usar o isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}}$ determinado pela base \mathcal{B} de $\mathcal{R}ef$.

Uma N -upla de vetores $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, na qual \mathbf{r}_i é a posição da i -ésima partícula do sistema ($i = 1, 2, \dots, N$), é chamada uma configuração do sistema. A configuração do sistema será denotada pelo mesmo símbolo usado anteriormente para denotar a posição da partícula de um sistema de uma única partícula. Assim,

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (5.1)$$

Agora, no entanto, $\mathbf{r} \in \vec{\mathcal{E}}^N$, enquanto no caso de uma única partícula tínhamos $\mathbf{r} \in \vec{\mathcal{E}}$; naturalmente, a nova notação é coerente com a antiga, uma vez que se reduz a ela no caso $N = 1$. O conjunto de todas as configurações possíveis do sistema é o seu **espaço de configurações**. O espaço de configurações é um subconjunto de $\vec{\mathcal{E}}^N$. Se estivéssemos usando vetores posições relativos a $\mathcal{R}ef$ a configuração dada por (5.1) seria escrita como $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2, \dots, \bar{\mathbf{r}}_N)$, onde $\bar{\mathbf{r}}_i \in \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2, \dots, N$) e $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^{3N}$. Nesse caso, o espaço de configurações é visto como um subconjunto de \mathbb{R}^{3N} .

Uma função-movimento do sistema, ou movimento do sistema, é uma N -upla de funções-movimento,

$$\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N). \quad (5.2)$$

na qual ϕ_i é o movimento da i -ésima partícula do sistema ($i = 1, 2, \dots, N$). Naturalmente, definimos $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t))$, de modo que a função-movimento do sistema associe a cada instante t do movimento a configuração \mathbf{r} do sistema nesse instante,

$$\mathbf{r} = \phi(t) . \quad (5.3)$$

O movimento do sistema é a mudança de configuração com o passar do tempo. Podemos considerar o movimento do sistema como o movimento de um ponto no espaço de configurações. Para representar as distribuições de velocidades e de acelerações de um sistema na configuração \mathbf{r} , usaremos os símbolos $\dot{\mathbf{r}}$ e $\ddot{\mathbf{r}}$, respectivamente. Portanto, $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$ e $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\mathbf{r}}_1, \ddot{\mathbf{r}}_2, \dots, \ddot{\mathbf{r}}_N)$.

Os movimentos possíveis do sistema são dados pela Segunda Lei de Newton, na forma das equações diferenciais dadas em (2.125),

$$m\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathcal{F}_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \quad (k = 1, 2, \dots, N) . \quad (5.4)$$

Temos que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ é um movimento possível do sistema se a substituição de $\mathbf{r}_1 = \phi_1(t)$, $\mathbf{r}_2 = \phi_2(t)$, \dots , $\mathbf{r}_N = \phi_N(t)$ nas equações (5.4) as transforma em identidades. Entre todos os movimentos possíveis do sistema existe um, e somente um, que satisfaz uma dada condição inicial do sistema, isto é, que em um dado instante t_0 , dito inicial, encontra-se em uma dada configuração $(\mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0})$ com uma dada distribuição de velocidades $(\mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}, \dots, \mathbf{v}_{N0})$, ambas também ditas iniciais.

A determinação dos movimentos possíveis do sistema resume-se, portanto, em resolver o sistema de equações diferenciais (5.4). Em geral, elas são equações diferenciais acopladas, cuja solução é tão difícil que, na prática, é impossível. Podemos resolvê-las em algumas situações mais simples ou abrir mão da procura da solução exata dos movimentos possíveis, contentando-nos com informações parciais sobre tais movimentos. Por isso, torna-se importante desenvolver métodos que permitam, sem resolver completamente essas equações, extrair delas informações sobre o movimento do sistema. Um exemplo de tais informações é dado pelo teorema do centro de massa (2.140). Neste capítulo veremos outros exemplos; investigaremos o sistema de equações (5.4) para obter resultados sobre os movimentos possíveis que elas determinam e desenvolver alguns métodos de análise que são úteis no estudo do movimento do sistema de partículas.

5.2 Momento linear de um sistema

Vimos na seção 2.6 que as forças sobre as partículas de um sistema dividem-se em forças **internas** e **externas** e que, conforme estabelecido na equação (2.134), a soma de todas as forças internas é zero. Conseqüentemente, somando-se todas as equações em (5.4), obtemos

$$\sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}^{ex} , \quad (5.5)$$

onde \mathbf{F}^{ex} , chamada **força externa total** sobre o sistema, é a soma de todas as forças externas que agem sobre ele,

$$\mathbf{F}^{ex} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{ex}, \quad (5.6)$$

Usando a definição (2.78) de momento linear de uma partícula, podemos escrever o membro esquerdo de (5.5) como a taxa de variação temporal do vetor

$$\mathbf{P} := \sum_{k=1}^N \mathbf{P}_k, \quad (5.7)$$

que chamamos **momento linear** do sistema de partículas. Usando essa definição em (5.5), obtemos

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ex}. \quad (5.8)$$

Esse é o chamado **teorema do momento linear de um sistema de partículas**. Dele obtemos, imediatamente, um resultado de suma importância, o **teorema da conservação do momento linear de um sistema de partículas**, que afirma ser constante o momento linear de um sistema de partículas quando a força externa total sobre ele é nula,

$$\mathbf{F}^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{P} = \text{constante}. \quad (5.9)$$

Portanto, se a força externa sobre o sistema é nula, o momento linear tem o mesmo valor no início e no final de qualquer intervalo de tempo. Se $\mathbf{P}(t_i)$ e $\mathbf{P}(t_f)$ são os valores do momento linear nos instantes inicial e final do intervalo $[t_i, t_f]$, temos

$$\mathbf{F}^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{P}(t_i). \quad (5.10)$$

Voltemos agora à situação geral em que a força externa total sobre o sistema pode não ser nula. Sendo \mathcal{F}^{ex} a função-força da força externa, podemos escrever (5.8) na forma explícita

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathcal{F}^{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t). \quad (5.11)$$

Consideremos um movimento possível do sistema, $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N)$, Integrando ambos os membros de (5.11) durante um intervalo $[t_i, t_f]$ desse movimento, obtemos

$$\mathbf{P}(t_f) - \mathbf{P}(t_i) = \int_{t_i(\boldsymbol{\phi})}^{t_f} \mathbf{F}^{ex} dt, \quad (5.12)$$

onde usamos a definição

$$\int_{t_i(\boldsymbol{\phi})}^{t_f} \mathbf{F}^{ex} dt := \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{F}^{ex}(\boldsymbol{\phi}_1(t), \boldsymbol{\phi}_2(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_N(t); \dot{\boldsymbol{\phi}}_1(t), \dot{\boldsymbol{\phi}}_2(t), \dots, \dot{\boldsymbol{\phi}}_N(t); t) dt \quad (5.13)$$

Tirando vantagem da notação definida na introdução deste capítulo, podemos escrever o membro direito dessa equação de modo mais abreviado,

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{F}^{ex}(\boldsymbol{\phi}(t), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t); t) dt := \\ & := \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{F}^{ex}(\boldsymbol{\phi}_1(t), \boldsymbol{\phi}_2(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_N(t); \dot{\boldsymbol{\phi}}_1(t), \dot{\boldsymbol{\phi}}_2(t), \dots, \dot{\boldsymbol{\phi}}_N(t); t) dt . \end{aligned} \quad (5.14)$$

A integral no membro direito de (5.12) é chamada **impulso fornecido pela força** \mathbf{F}^{ex} ao sistema durante o intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ do movimento $\boldsymbol{\phi}$. Então, a equação (5.12) afirma que a variação do momento linear do sistema, no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$, é igual ao impulso fornecido pela força resultante nesse intervalo. Esse é o chamado **teorema do momento linear e impulso** para um sistema.

Naturalmente, o impulso fornecido pela força externa total é a soma dos impulsos fornecidos pelas forças externas que agem sobre as partículas do sistema. Se nenhuma dessas força é impulsiva, é desprezível o impulso total em um intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ suficientemente pequeno; é nulo no limite em que a duração do intervalo vai a zero. Nesse caso, a equação (5.12) nos leva a

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{P}(t_i) , \quad (5.15)$$

ou seja, podemos considerar que o momento linear se conserva, pelo menos de modo aproximado, mesmo com uma força externa total diferente de zero. Devem ficar bem claras as hipóteses dessa conservação, ela ocorre em um intervalo de tempo suficientemente pequeno, na ausência de forças externas percussivas. Essas hipóteses são satisfeitas nos processos ditos de colisão. Nesses processos as partículas interagem por meio de forças internas percussivas; são forças muito intensas que agem apenas durante o brevíssimo tempo de contato entre as partículas. Sendo internas, elas não contribuem para a variação do momento linear. Frequentemente, as forças externas não são percussivas, de modo que não têm tempo de fornecer impulso significativo ao sistema, durante o contato entre as partículas. Com isso temos a conservação do momento (5.15), durante o intervalo de tempo da colisão.

Comparando a definição (5.7) de momento linear com a definição (2.139) de centro de massa obtemos:

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} , \quad (5.16)$$

onde M é a massa total do sistema e $\dot{\mathbf{R}}$, a velocidade do seu centro de massa. O produto $M\dot{\mathbf{R}}$ é chamado **momento linear do centro de massa** do sistema, de modo que podemos afirmar que o momento linear de um sistema é igual ao momento linear de seu centro de massa.

5.3 Momento angular de um sistema

De acordo com a definição (4.25), o momento angular relativo à origem da k -ésima partícula do sistema é

$$\mathbf{L}_k := \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k . \quad (5.17)$$

Usando a Segunda Lei de Newton, obtemos para a taxa temporal de variação desse momento angular,

$$\frac{d\mathbf{L}_k}{dt} = \mathbf{N}_k, \quad (5.18)$$

onde

$$\mathbf{N}_k := \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k, \quad (5.19)$$

que é o torque da força resultante sobre a k -ésima partícula. Somando (5.18) para todas as partículas do sistema obtemos a igualdade

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (5.20)$$

na qual usamos as definições

$$\mathbf{L} := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{r}_k \quad (5.21)$$

e

$$\mathbf{N} := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k \quad (5.22)$$

A grandeza \mathbf{L} , definida em (5.21), é chamada **momento angular do sistema**; obviamente, ele é a soma dos momentos angulares de todas as partículas do sistema. A grandeza \mathbf{N} , definida em (5.22), é chamada **torque total sobre o sistema** e é dada pela soma dos torques sobre todas as partículas do sistema; todos os momentos angulares e torques envolvidos nessas definições são, é claro, tomados em relação ao mesmo ponto base O .

A Terceira Lei de Newton leva ao cancelamento das forças internas e é natural perguntar que restrições impõem à soma dos torques de todas as forças internas. Temos

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{in} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1(k)}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj} = \frac{1}{2} \sum'_{k,j=1}^N (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{kj}, \quad (5.23)$$

onde o símbolo (k) no somatório em j indica que o valor $j = k$ é omitido e a plica no somatório duplo também indica a omissão dos termos com $j = k$. Supondo que as forças de ação e reação entre duas partículas têm a direção da reta que passa por elas, *i.e.*, $\mathbf{F}_{kj} \parallel (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)$, obtemos em (5.23) que os torques das forças internas se cancelam. Denotando a soma desses torques por \mathbf{N}^{in} , temos

$$\mathbf{N}^{in} := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{in} = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

Conseqüentemente, o torque total (5.22) é igual à soma dos torques das forças externas, que chamamos **torque externo total** e denotamos por \mathbf{N}^{ex} ,

$$\mathbf{N}^{ex} := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{ex}. \quad (5.25)$$

Temos, então,

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^{ex} . \quad (5.26)$$

Vemos que o valor nulo para a soma dos torques das forças internas se deve à hipótese de que as forças de ação e reação têm a direção da reta que passa por elas. Nesse contexto, distinguimos a Terceira Lei de Newton Fraca, que afirma que ação e reação entre duas partículas têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos, da Terceira Lei de Newton Forte, que afirma que, além disso, elas têm a direção da reta que passa pelas duas partículas. Estamos, pois, supondo a validade da Terceira Lei de Newton em sua forma forte. Observemos que os adjetivos forte e fraco nesse contexto têm significado lógico (uma proposição é mais forte do que outra se contém propriamente a outra que, nesse caso, é dita mais fraca que a primeira).

Usando o resultado (5.26) em (5.20), obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{ex} , \quad (5.27)$$

i.e., a taxa temporal de variação do momento angular do sistema é igual ao torque externo total sobre o sistema. Esse resultado é chamado **teorema do momento angular** de um sistema de partículas. Quando o torque externo total é nulo o momento angular do sistema se conserva,

$$\mathbf{N}^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L} = \text{constante} . \quad (5.28)$$

Esse resultado é conhecido como **teorema da conservação do momento angular** de um sistema. È possível demonstrar a partir de (5.27) um teorema análogo a (5.12). Ele afirma que a variação do momento angular de um sistema em um intervalo de um movimento possível é igual à integral temporal do torque externo total nesse intervalo.

Agora, consideremos um ponto Q qualquer. Um ponto com vetor posição \mathbf{r} tem vetor posição relativo a Q igual a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$. As respectivas velocidade e aceleração relativas a Q são $\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_Q$ e $\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_Q$, respectivamente. A k -ésima partícula do sistema tem vetor de posição relativo a Q dado por

$$\mathbf{r}_{kQ} := \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q . \quad (5.29)$$

Definimos momento angular da partícula relativo a Q como sendo a grandeza $\mathbf{r}_{kQ} \times m_k \dot{\mathbf{r}}_{kQ}$, e definimos **momento angular do sistema relativo a Q** como sendo a soma

$$\mathbf{L}_Q := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_{kQ} \times m_k \dot{\mathbf{r}}_{kQ} . \quad (5.30)$$

Definimos torque da força \mathbf{F}_k sobre a k -ésima partícula, relativo a Q , como sendo a grandeza $\mathbf{r}_{kQ} \times \mathbf{F}_k$. Se \mathbf{F}_k é a força total sobre a k -ésima partícula definimos torque total sobre o sistema, relativo a Q , como sendo a soma

$$\mathbf{N}_Q := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_{kQ} \times \mathbf{F}_k . \quad (5.31)$$

Também definimos **torque externo total** sobre o sistema, relativo a Q , como sendo a soma

$$\mathbf{N}_Q^{ex} := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_{kQ} \times \mathbf{F}_k^{ex} . \quad (5.32)$$

O ponto Q , relativo ao qual se calculam os momentos angulares e os torques é chamado **ponto base**. É possível demonstrar a igualdade

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q^{ex} , \quad (5.33)$$

desde que se cumpra uma das seguintes condições : (i) Q tem aceleração nula, ou (ii) Q é o centro de massa do sistema, ou (iii) Q só tem aceleração na direção da reta que o liga ao centro de massa. Quando se cumpre a condição (i) Q pode ser considerado como um ponto fixo em um referencial inercial e, conseqüentemente, (5.33) em nada generaliza o resultado (5.27). Quando Q é o centro de massa temos em (5.33) um resultado de extrema importância,

$$\frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} = \mathbf{N}_{cm}^{ex} . \quad (5.34)$$

Esse resultado não está incluído em (5.27). A condição (iii) é muito incomum e não merecerá nossa atenção. Notemos que, em todos os casos em que (5.33) é válida, as forças em consideração são definidas em um referencial **inercial**, mesmo que o ponto base Q esteja acelerado.

Se não há torque externo em relação a Q temos, por (5.33), que se conserva o momento angular do sistema relativo a Q ,

$$\mathbf{N}_Q^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L}_Q = \text{constante} . \quad (5.35)$$

É importante observar que as propriedades do momento linear e angular nos fornecem informações geralmente independentes. Por exemplo, o momento linear pode se conservar sem que o linear seja conservado, e *vice versa*. Também a conservação de ambos dá mais informações sobre os movimentos do sistema do que a conservação de cada um em separado. Se há conservação de ambos temos, de (5.9) e (5.35),

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_N \mathbf{v}_N = \mathbf{P}_0 \quad (5.36)$$

e

$$m_1 \mathbf{r}_{1Q} \times \mathbf{v}_{1Q} + m_2 \mathbf{r}_{2Q} \times \mathbf{v}_{2Q} + \cdots + m_N \mathbf{r}_{NQ} \times \mathbf{v}_{NQ} = \mathbf{L}_{Q0} , \quad (5.37)$$

onde \mathbf{P}_0 e \mathbf{L}_{Q0} são constantes determinadas pela condição inicial. Portanto, embora o movimento do sistema com essa condição inicial possa ser desconhecido, pelo menos sabemos que ele se processa de modo que as posições e velocidades das partículas, a cada instante, respeitam as restrições (5.36) e (5.37).

5.4 Energia do sistema

Voltando às equações fundamentais (5.4), multipliquemos escalarmente a k -ésima equação pela velocidade $\dot{\mathbf{r}}_k$ da k -ésima partícula. Obtemos

$$\frac{dT_k}{dt} = \mathcal{F}_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_k, \quad (5.38)$$

onde T_k é a energia cinética da k -ésima partícula,

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2, \quad (5.39)$$

e o membro direito e (5.38) é a potência instantânea fornecida à k -ésima partícula pela resultante que age sobre ela no movimento em consideração.

O trabalho realizado por esta resultante no deslocamento elementar $d\mathbf{r}_k$ é, por definição,

$$\bar{d}W_k = \mathcal{F}_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \cdot d\mathbf{r}_k, \quad (5.40)$$

onde a notação da letra “d” cortada significa que a forma diferencial no membro direito de (5.40) pode não ser um diferencial exato nas variáveis independentes de \mathcal{F}_k . Em (5.38) estamos considerando um movimento possível do sistema, durante o qual $d\mathbf{r}_k = \dot{\mathbf{r}}_k dt$. Usando (5.40) podemos escrever (5.38) na forma

$$dT_k = \bar{d}W_k. \quad (5.41)$$

Notemos que o trabalho que aparece em (5.40) e (5.41) depende do movimento da k -ésima partícula e das outras partículas do sistema. A equação (5.41) é a relação entre trabalho e energia cinética da k -ésima partícula do sistema, em tudo análogo ao teorema (IV.28) demonstrado para uma partícula em vizinhanças conhecidas. Agora, no entanto, não estamos supondo conhecidos os movimentos das outras partículas do sistema, de modo que (5.41), por si só, não fornece informação quase nenhuma sobre o movimento do sistema. Relacionado a esse fato, temos que os coeficientes do diferencial total (5.40) em geral dependem de todas as variáveis $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N$ e t , mas somente o diferencial de \mathbf{r}_k está presente. Portanto, se quisermos obter um diferencial exato que dependa de tais variáveis cinemáticas, que sabemos dar boas informações sobre os movimentos do sistema, devemos começar por adicionar as equações (5.41), para $k = 1, 2, \dots, N$. Definindo **energia cinética total do sistema** como sendo a grandeza T dada por

$$T := \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2, \quad (5.42)$$

e **trabalho total sobre o sistema** como sendo a grandeza $\bar{d}W$ dada por

$$\bar{d}W := \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \cdot d\mathbf{r}_k, \quad (5.43)$$

obtemos de (5.41) a igualdade

$$dT = \bar{d}W. \quad (5.44)$$

Este resultado é chamado de **teorema da energia cinética e trabalho** do sistema de partículas. Notemos que, tanto em (5.41) quanto em (5.44), não é de se estranhar que o diferencial exato da energia cinética seja igualado ao diferencial do trabalho, que pode não ser exato, pois ambos estão sendo considerados durante um intervalo de tempo dt de um dado movimento real do sistema.

Agora passemos à análise dos trabalhos realizados por forças internas e externas. Podemos escrever o trabalho em (5.44) como

$$\vec{d}W = \vec{d}W^{in} + \vec{d}W^{ex} , \quad (5.45)$$

onde

$$\vec{d}W^{in} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{in} \cdot d\mathbf{r}_k \quad (5.46)$$

é chamado **trabalho realizado pelas forças internas** sobre o sistema e

$$\vec{d}W^{ex} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{ex} \cdot d\mathbf{r}_k \quad (5.47)$$

é chamado **trabalho realizado pelas forças externas** sobre o sistema. Ao contrário do que acontece com o momento linear e o momento angular, os efeitos das forças internas não se cancelam no trabalho total sobre o sistema em virtude de algum princípio fundamental da dinâmica. Se ocorrem cancelamentos, eles são devidos a circunstâncias particulares. Podemos, no entanto, usar os princípios da dinâmica para especificar melhor a forma do trabalho das forças internas. Com efeito, em virtude do Princípio de Relatividade Galileano, temos que as forças internas são funções apenas de posições e velocidades relativas, conforme dado pela equação (2.127). Usando essa equação e a Terceira Lei de Newton, obtemos para o trabalho (5.46) das forças internas,

$$\vec{d}W^{in} = \frac{1}{2} \sum'_{k,j=1}^N \mathcal{F}_{kj}(\mathbf{r}_{kj}, \dot{\mathbf{r}}_{kj}) \cdot d\mathbf{r}_{kj} . \quad (5.48)$$

Agora, vamos nos restringir à situação importante em que as forças internas dependem apenas da configuração do sistema. Nesse caso,

$$\vec{d}W^{in} = \frac{1}{2} \sum'_{k,j=1}^N \mathcal{F}_{kj}(\mathbf{r}_{kj}) \cdot d\mathbf{r}_{kj} . \quad (5.49)$$

Podemos agora considerar a possibilidade de que o trabalho $\vec{d}W^{in}$ seja um diferencial exato, *i.e.*, que exista uma função $-U'$, que depende apenas da configuração do sistema, cujo diferencial seja o trabalho elementar $\vec{d}W^{in}$. Se este é o caso,

$$\vec{d}W^{in} = -dU'(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (5.50)$$

onde o sinal menos é usado por conveniência. O trabalho total $\vec{d}W$ em (5.45) assume, então, a forma

$$\vec{d}W = -dU' + \vec{d}W^{ex} \quad (5.51)$$

e o teorema do trabalho e energia cinética (5.44) pode ser escrito como

$$d(T + U') = \vec{\alpha} W^{ex} . \quad (5.52)$$

A função U' em (5.50) é chamada **energia potencial interna** do sistema de partículas; obviamente, a energia potencial interna é definida a menos de uma constante aditiva. O resultado (5.52) afirma que a variação da soma da energia cinética com a interna, em um intervalo de tempo elementar, é igual ao trabalho realizado pelas forças externas sobre o sistema durante esse intervalo.

Agora, Consideremos o caso ainda mais particular em que também o trabalho das forças externas é um diferencial exato, *i.e.*, em que existe uma função $-U''$, que depende apenas da configuração do sistema e cujo diferencial seja igual ao trabalho elementar das forças externas,

$$\vec{\alpha} W^{ex} = -dU''(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (5.53)$$

sendo o sinal menos usado por conveniência. Nesse caso, (5.52) reduz-se a

$$d(T + U' + U'') = 0 . \quad (5.54)$$

A função U'' é chamada **energia potencial externa** do sistema de partículas; ela é definida por (5.53) a menos de uma constante aditiva. Quando existem as energias potenciais interna e externa definimos **energia potencial do sistema e vizinhança** como sendo a soma da interna e da externa. Essa energia potencial do sistema e vizinhança é muitas vezes chamada, simplesmente, energia potencial do sistema. Denotando-a por U , temos

$$U := U' + U'' . \quad (5.55)$$

Sendo verdadeiras as equações (5.50), (5.53), e usando as definições (5.45) e (5.55), obtemos

$$\vec{\alpha} W = -dU(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (5.56)$$

que descreve a situação em que o trabalho elementar total sobre o sistema é um diferencial exato.

Definimos **energia total** E do sistema de partículas como sendo a soma das energias cinética e potencial do sistema,

$$E := T + U . \quad (5.57)$$

Usando essa definição, podemos escrever (5.54) na forma

$$dE = 0 . \quad (5.58)$$

ou seja,

$$\frac{dE}{dt} = 0 , \quad (5.59)$$

em qualquer movimento real do sistema. A forma integrada dessa equação é

$$E = E_0 , \quad (5.60)$$

onde E é uma função da configuração e distribuição de velocidades do sistema e E_0 é uma constante determinada pela condição inicial do sistema. O resultado (5.60) é conhecido como **teorema da conservação da energia** do sistema. Pela discussão anterior sabemos que tal teorema é decorrência de (5.56), i.e., do trabalho total sobre o sistema ser um diferencial exato; sistemas que gozam dessa propriedade são chamados **conservativos**. Daí o seguinte enunciado para o teorema da conservação da energia: “se um sistema é conservativo sua energia total se conserva”. Definimos **força conservativa** como aquela cujo trabalho elementar é um diferencial exato. Desse modo, podemos dizer que o sistema é conservativo se a força total sobre ele é conservativa.

Agora, consideremos uma outra maneira de caracterizar um sistema conservativo e que proporciona um método de encontrar uma energia potencial do sistema. Vamos integrar a equação (5.43) em um intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ de um movimento possível $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_N)$ do sistema,

$$\int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\phi} \, \vec{d}W = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\phi} \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \, dt, \quad (5.61)$$

onde, por definição,

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\phi} \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \, dt &= \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_k(\boldsymbol{\phi}_1(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_N(t); \dot{\boldsymbol{\phi}}_1(t), \dots, \dot{\boldsymbol{\phi}}_N(t); t) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k(t) \, dt. \end{aligned} \quad (5.62)$$

A integral (5.61) é a soma dos trabalhos realizados, durante o intervalo $[t_i, t_f]$, por todas as forças do sistema, no seu movimento $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_N)$. É o que chamamos **trabalho total sobre o sistema** no intervalo de tempo do movimento considerado.

Passemos ao caso em que as forças dependem apenas da configuração do sistema. Temos, então, que (5.61) assume a forma mais simples

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\phi} \, \vec{d}W &= \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\phi} \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \, dt = \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_k(\boldsymbol{\phi}_1(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_N(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k(t) \, dt. \end{aligned} \quad (5.63)$$

No caso em que o trabalho elementar $\vec{d}W$ é um diferencial exato, como estabelecido em (5.56), é fácil verificar que esse trabalho depende apenas das configurações inicial e final do sistema no intervalo $[t_i, t_f]$. Nesse caso o trabalho nesse intervalo não depende do movimento do sistema ao passar da configuração inicial para a final, isto é, não depende das trajetórias que as partículas seguiram quando o sistema passa de uma configuração para a outra e nem da maneira como as partículas percorreram essas

trajetórias. De fato, usando (5.56) em (5.63), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\phi} \, dW &= \int_{t_i}^{t_f} -dU(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \\ &= -[U(\mathbf{r}_{1f}, \dots, \mathbf{r}_{Nf}) - U(\mathbf{r}_{1i}, \dots, \mathbf{r}_{Ni})], \end{aligned} \quad (5.64)$$

onde, naturalmente, $\mathbf{r}_{1i} = \boldsymbol{\phi}_1(t_i), \dots, \mathbf{r}_{Ni} = \boldsymbol{\phi}_N(t_i)$ são as posições das partículas no instante inicial do intervalo considerado, e $\mathbf{r}_{1f} = \boldsymbol{\phi}_1(t_f), \dots, \mathbf{r}_{Nf} = \boldsymbol{\phi}_N(t_f)$, as no instante final. Elas definem as respectivas configurações inicial e final do sistema, $\mathbf{r}_i = (r_{1i}, \dots, r_{Ni})$ e $\mathbf{r}_f = (r_{1f}, \dots, r_{Nf})$. Reciprocamente, se o trabalho (5.63) depende apenas das configurações inicial e final do sistema, podemos escrevê-lo na forma

$$\int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\phi} \, dW = W(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_f), \quad (5.65)$$

onde W é a função que dá o trabalho associado às duas configurações, inicial e final. Podemos, então, definir uma função U dada por

$$U(\mathbf{r}) := W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p), \quad (5.66)$$

onde \mathbf{r}_p é uma configuração fixa do sistema. Desse modo, a cada configuração \mathbf{r} do sistema a função U faz corresponder o trabalho que as forças sobre o sistema realizariam se ele fosse da configuração \mathbf{r} até a configuração fixada \mathbf{r}_p . Tendo em vista (5.65) podemos escrever (5.66) também na forma

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) := \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} dW, \quad (5.67)$$

onde abolimos da integral o símbolo $\boldsymbol{\phi}$ que especifica o movimento porque ela, por hipótese, não depende dele.

Da definição (5.66), obtemos

$$\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} dW = -[U(\mathbf{r}_f) - U(\mathbf{r}_i)] \quad (5.68)$$

e

$$dW = -dU(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (5.69)$$

Portanto, o negativo do diferencial da função U , definida em (5.67), é igual ao trabalho elementar. De acordo com a definição dada nesta seção, essa função é uma energia potencial do sistema. A configuração do sistema \mathbf{r}_p , escolhida para a definição (5.67) de U , é chamada **configuração padrão** dessa energia potencial.

Resumindo, temos que dW é um diferencial exato se o trabalho realizado sobre o sistema em qualquer intervalo de tempo de qualquer movimento do sistema depender somente das configurações inicial e final do sistema no intervalo. Podemos, então, usar essa dependência exclusiva das configurações inicial e final como um critério para verificar se o sistema é conservativo. Caso o seja, usamos (5.67) como uma definição de energia potencial do sistema; é claro que adicionando a U definida em (5.67) uma constante qualquer o resultado ainda é uma energia potencial do sistema.

5.5 Movimento em relação ao centro de massa

Um expediente útil no estudo do movimento de um sistema de partículas consiste em considerar esse movimento como a composição do movimento do centro de massa do sistema com o que denominamos movimento das partículas relativo ao centro de massa. A seguir, desenvolvemos essa idéia.

Seja \mathbf{r}'_k o vetor-posição relativo ao centro de massa da k -ésima partícula do sistema,

$$\mathbf{r}'_k := \mathbf{r}_k - \mathbf{R} . \quad (5.70)$$

Temos, de imediato,

$$\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}'_k = \mathbf{0} \quad (5.71)$$

Essa equação expressa o fato trivial de ser nulo o vetor-posição do centro de massa relativo a ele mesmo, *i.e.*, $\mathbf{R}' := \mathbf{0}$. Definamos **momento linear relativo ao centro de massa** como sendo o vetor

$$\mathbf{P}' := \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{r}}'_k . \quad (5.72)$$

Obtemos de (5.71)

$$\mathbf{P}' = \mathbf{0} , \quad (5.73)$$

i.e., é sempre nulo o momento linear de um sistema relativo ao seu centro de massa. Esse resultado deve ser associado a (5.16), que afirma que o momento linear de um sistema é o momento linear de seu centro de massa.

Usando (5.70) na definição (5.21) de momento angular de um sistema, obtemos, em virtude de (2.136),

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times M\dot{\mathbf{r}} + \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}'_k , \quad (5.74)$$

onde M é a massa total do sistema, definida em (5.72). O somatório em (5.74) é o momento angular relativo ao centro de massa, definido em (5.30). Essa equação preconiza para ele a notação \mathbf{L}_{cm} , mas aqui o representaremos por \mathbf{L}' ,

$$\mathbf{L}' := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}'_k . \quad (5.75)$$

Usando essa definição em (5.74), obtemos

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r} \times M\dot{\mathbf{r}} . \quad (5.76)$$

O termo $\mathbf{r} \times M\dot{\mathbf{r}}$ nessa equação é chamado **momento angular do centro de massa** do sistema. A equação (5.76) afirma, portanto, que o momento angular de um sistema é igual ao seu momento angular em relação ao centro de massa mais o momento angular do centro de massa.

Se usarmos (5.70) na definição (5.22) de torque total sobre o sistema, obtemos uma expressão que, em virtude da Terceira Lei de Newton, pode ser posta na forma

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}' + \mathbf{r} \times \mathbf{F}^{ex}, \quad (5.77)$$

onde \mathbf{N}' é o torque total relativo ao centro de massa, de acordo com a definição (5.31),

$$\mathbf{N}' := \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k \quad (5.78)$$

Chamando $\mathbf{R} \times \mathbf{F}^{ex}$ **torque sobre o centro de massa**, temos em (5.77) que o torque total sobre um sistema é o torque total em relação ao centro de massa mais o torque sobre o centro de massa.

Supondo que as forças internas de interação têm a direção da reta que passa pelas partículas interagentes, *i.e.*, a Terceira Lei de Newton forte para as forças internas, obtemos um cancelamento total dos torques das forças internas relativos ao centro de massa. com isso obtemos

$$\mathbf{N}' = \mathbf{N}'^{ex}, \quad (5.79)$$

onde \mathbf{N}'^{ex} é o torque externo total relativo ao centro de massa,

$$\mathbf{N}'^{ex} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{ex}. \quad (5.80)$$

Usando (5.79) em (5.77), obtemos

$$\mathbf{N}^{ex} = \mathbf{N}'^{ex} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{ex}. \quad (5.81)$$

Portanto, o torque externo total sobre um sistema é o torque externo total em relação ao centro de massa mais o torque sobre o centro de massa.

Usando (5.70) e (5.71) na definição (5.42) de energia cinética total do sistema, obtemos

$$T = T' + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2, \quad (5.82)$$

onde T' é definida por

$$T' := \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k'^2 \quad (5.83)$$

e denominada **energia cinética total do sistema relativa ao centro de massa**. A expressão $M\dot{\mathbf{R}}^2/2$, que aparece em (5.82), é chamada **energia cinética do centro de massa**. Desse modo, (5.82) estabelece que a energia cinética de um sistema é igual à sua energia cinética relativa ao centro de massa mais a energia cinética do centro de massa. A energia cinética relativa ao centro de massa é também chamada **energia cinética interna do sistema**.

De acordo com (5.49), a energia potencial interna U' do sistema, definida em (5.50), depende apenas das posições relativas das partículas do sistema, pois

$$dU'(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathcal{F}_{kj}(\mathbf{r}_{kj}) \cdot d\mathbf{r}_{kj}. \quad (5.84)$$

A definição de posição relativa, $\mathbf{r}_{kj} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j$ e a definição (5.70) de posição relativa ao centro de massa, resultam na igualdade

$$\mathbf{r}'_{kj} = \mathbf{r}_{kj} . \quad (5.85)$$

Portanto, a energia potencial interna do sistema depende apenas das posições de suas partículas relativas ao centro de massa, de modo que podemos escrever

$$U'(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = U'(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N) . \quad (5.86)$$

Definimos **energia interna** de um sistema como sendo sua energia cinética interna (5.83) mais sua energia potencial interna U' ; a energia interna é função apenas das posições e velocidades relativas ao centro de massa do sistema. Denotando por E^{in} a energia interna, temos

$$E^{in} = T' + U' \quad (5.87)$$

ou, mais explicitamente,

$$E^{in}(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N; \dot{\mathbf{r}}'_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}'_N) := \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}'_k + U'(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N) . \quad (5.88)$$

Vemos que a energia interna do sistema é uma quantidade que depende apenas das posições e velocidades das partículas relativas ao centro de massa do sistema.

Quando a resultante das forças externas é nula obtemos de (2.140) que o centro de massa tem velocidade constante. Nesse caso, tomemos como referencial inercial um referencial em que esta velocidade é nula, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$. Com isso, de acordo com (5.82), a energia cinética total do sistema torna-se igual à sua energia em relação ao centro de massa, $T = T'$. Podemos, então, usar a definição (5.87) de energia interna para escrever (5.52) na forma

$$dE^{in} = \bar{d}W^{ex} \quad (5.89)$$

Essa equação é o ponto de partida para se obter a Primeira Lei da termodinâmica em Física Estatística.

5.6 Problema de dois corpos

Consideremos um sistema constituído por duas partículas. Nesse caso, o problema fundamental da Mecânica é chamado **problema de dois corpos**. Estamos interessados apenas no caso em que as forças sobre as partículas não dependem das velocidades. Temos, então, as seguintes equações de movimento para o sistema:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) \quad \text{e} \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) . \quad (5.90)$$

Veremos que, sob certas condições, essas duas equações podem ser desacopladas.

As forças internas entre duas partículas dependem apenas de suas posições relativas. Portanto, é natural utilizar como uma das variáveis do problema a posição relativa $\mathbf{r}_{12} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, que passamos a denotar por \mathbf{r} ,

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (5.91)$$

A outra variável que usaremos será a posição do centro de massa,

$$\mathbf{R} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}. \quad (5.92)$$

Passamos das variáveis \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 para as variáveis \mathbf{r} e \mathbf{R} por meio de (5.91) e (5.92) e podemos retornar às variáveis \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 por meio de

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (5.93)$$

A equação de movimento do centro de massa é, de acordo com (2.140),

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathcal{F}_1^{ex}(\mathbf{r}_1, t) + \mathcal{F}_2^{ex}(\mathbf{r}_2, t), \quad (5.94)$$

enquanto a equação do chamado **movimento relativo** é

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathcal{F}_{12}(\mathbf{r}) + \mu \left[\frac{\mathcal{F}_1^{ex}(\mathbf{r}_1, t)}{m_1} - \frac{\mathcal{F}_2^{ex}(\mathbf{r}_2, t)}{m_2} \right], \quad (5.95)$$

onde \mathcal{F}_{12} é a função-força da força interna da segunda partícula sobre a primeira que, naturalmente, depende apenas da posição relativa das partículas e

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.96)$$

Essa constante μ é chamada **massa reduzida** do par de partículas. Note que $\mu < m_1$ e $\mu < m_2$. Naturalmente, tanto (5.94) quanto (5.95) são obtidas a partir das equações de movimento (5.90) para o par de partículas.

Podemos usar (5.93) para substituir nas forças externas, que aparecem em (5.94) e (5.95), as variáveis \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 pelas variáveis \mathbf{r} e \mathbf{R} . Fazemos isso e escrevemos

$$\mathcal{F}^{ex}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) := \mathcal{F}_1^{ex} \left(\mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, t \right) + \mathcal{F}_2^{ex} \left(\mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, t \right) \quad (5.97)$$

e

$$\Phi^{ex}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) := \mu \left[\frac{1}{m_1} \mathcal{F}_1^{ex} \left(\mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, t \right) - \frac{1}{m_2} \mathcal{F}_2^{ex} \left(\mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, t \right) \right], \quad (5.98)$$

expressões que definem a função-força \mathcal{F}^{ex} que dá a força externa total como função das variáveis \mathbf{R} e \mathbf{r} , e a função Φ^{ex} , que dá a particular combinação de forças externas que aparece em (5.95) e influencia o movimento relativo, como função de \mathbf{R} e \mathbf{r} . Usando (5.97) e (5.98) em (5.94) e (5.95), obtemos

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathcal{F}^{ex}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) \quad \text{e} \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathcal{F}_{12}(\mathbf{r}) + \Phi^{ex}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t). \quad (5.99)$$

As equações (5.99) são equivalentes às equações (5.90), porém, em (5.99), podemos identificar situações interessantes em que as variáveis do movimento se desacoplam. Por exemplo, se na primeira equação de (5.99) a força externa total não depende da posição relativa \mathbf{r} , a equação inteira só depende de \mathbf{r} e, em princípio, poderá ser

integrada para obtermos o movimento $\mathbf{R}(t)$ do centro de massa. Substituindo $\mathbf{R}(t)$ na segunda equação de (5.99), essa passa a depender apenas de \mathbf{r} e, em princípio, também poderá ser integrada para obtermos o movimento relativo $\mathbf{r}(t)$. Analogamente, se Φ^{ex} na segunda equação de (5.99) não depende de \mathbf{r} , podemos, em princípio, obter dela o movimento relativo $\mathbf{r}(t)$. Substituindo essa solução na primeira equação de (5.99), teremos uma equação envolvendo apenas \mathbf{R} ; resolvendo-a, obtemos o movimento do centro de massa $\mathbf{R}(t)$.

A situação de maior interesse no problema de dois corpos é aquela em que $\Phi^{ex} = \mathbf{0}$, seja porque não há forças externas, seja porque elas são proporcionais às massas das partículas,

$$\frac{\mathbf{F}_1^{ex}}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_2^{ex}}{m_2}. \quad (5.100)$$

Essa condição é satisfeita por forças gravitacionais $\mathbf{F}_k = m_k \mathbf{g}$ ($k = 1, 2$), nas quais \mathbf{g} é um vetor constante. Supondo que (5.100) é satisfeita, a segunda equação de (5.99) reduz-se a

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}). \quad (5.101)$$

Nessa equação, o movimento relativo é determinado apenas pela força de interação entre as duas partículas. A equação (5.101) tem a forma da equação de movimento de uma única partícula, sujeita à força total \mathbf{F}_{12} e com massa igual à massa reduzida μ , definida em (5.96).

Vamos finalizar notando que, no sistema de duas partículas, as grandezas fundamentais momento linear \mathbf{P} , momento angular \mathbf{L} e energia cinética T , podem ser escritas como a soma de parcelas nas quais aparecem somente variáveis do centro de massa ou somente variáveis do movimento relativo; dizemos que nessas grandezas as variáveis relativas aparecem desacopladas das variáveis do centro de massa. Temos

$$\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}, \quad (5.102)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{R} \times M \dot{\mathbf{R}} \quad (5.103)$$

e

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2. \quad (5.104)$$

5.7 Rotação de corpo rígido em torno de eixo fixo

A posição de um corpo rígido no espaço, *i.e.*, a configuração das partículas que o compõem, é dada por 6 coordenadas. De fato, com 3 coordenadas podemos especificar as possíveis posições de um ponto do corpo, digamos P_1 . Dado um ponto P_2 do corpo, diferente de P_1 , as suas posições possíveis estão em uma esfera centrada em P_1 , cujo raio é a distância entre P_1 e P_2 . A posição de P_2 nessa esfera é determinada por 2 coordenadas. Com as posições de P_1 e P_2 especificadas ficam também especificadas as posições de todos os pontos do corpo que estão na reta que passa por P_1 e P_2 . Um ponto P_3 que não está nesta reta está a uma distância fixa dela. Portanto, as posições possíveis de P_3 estão em uma circunferência centrada na reta que passa por P_1 e P_2 , contida em um plano perpendicular a essa reta. A posição de P_3

nessa circunferência é determinada por uma única coordenada. Junto com P_3 ficam determinadas as posições dos demais pontos do corpo, devido à sua rigidez. Desse modo, temos as possíveis posições do corpo rígido dadas por 6 coordenadas. Para determinar o movimento do corpo rígido devemos determinar as 6 funções que dão estas coordenadas em função do tempo. Para isso dispomos das 6 equações, dadas por (5.8),

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{P}^{ex} \quad (5.105)$$

e por (5.33),

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q^{ex} . \quad (5.106)$$

A determinação do movimento geral do corpo rígido a partir dessas 6 equações é um problema complicado que estudaremos em um capítulo posterior.

Nesta seção, consideramos apenas a situação muito simples na qual o corpo rígido tem por movimento apenas rotações em torno de um eixo fixo no referencial inercial em uso; notemos que tais rotações são, de fato, movimentos possíveis de um corpo rígido. Nesses movimentos, por definição, cada partícula do corpo move-se em uma circunferência centrada no eixo fixo e com jazitura perpendicular a ele. O eixo fixo em torno do qual rodam as partículas do corpo é chamado de **eixo de rotação**. Vamos escolher um sistema de eixos com o eixo OZ ao longo do eixo fixo de rotação e usar coordenadas cilíndricas para localizar posições no espaço. Sejam b_k , φ_k e z_k as coordenadas cilíndricas da k -ésima partícula do corpo, partícula cuja massa é m_k e cujo vetor-posição é \mathbf{r}_k . Na posição dessa partícula temos os respectivos unitários das coordenadas cilíndricas, que serão denotados por $\hat{\mathbf{b}}_k$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k$ e $\hat{\mathbf{z}}$. Uma vez que o único movimento do corpo é de rotação em torno de OZ , temos que b_k e z_k são constantes, sendo b_k o raio da circunferência na qual se move a k -ésima partícula, com velocidade instantânea $b_k\dot{\varphi}_k\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k$. Chamamos $\dot{\varphi}$ **velocidade angular instantânea** de rotação da k -ésima partícula em torno do eixo OZ . Devido à rigidez do corpo, temos que $\varphi_j - \varphi_k = \text{const.}$ para qualquer par de partículas j e k do corpo. Conseqüentemente, temos que $\dot{\varphi}_j = \dot{\varphi}_k$, *i.e.*, todas as partículas têm a mesma velocidade angular, que também denominamos **velocidade angular de rotação do corpo rígido** em torno do eixo fixo, e que denotamos por ω ,

$$\dot{\varphi}_k = \omega \quad (k = 1, \dots, N) . \quad (5.107)$$

Podemos fixar **no corpo rígido** uma semireta que parte da origem O e está contida no plano OXY . Denotando por φ a coordenada cilíndrica de tal semi-reta, temos

$$\omega = \dot{\varphi} . \quad (5.108)$$

É conveniente escolher uma tal semireta e usar a variável φ para estudar a rotação do corpo rígido em torno de OZ .

Para determinar o movimento de rotação do corpo rígido em torno do eixo fixo OZ vamos usar (5.106), ou mais precisamente (5.27), pois usaremos como ponto de base o ponto O , fixo no eixo de rotação e no referencial inercial em uso. Temos, em virtude de (5.107),

$$L_z = I_{zz}\dot{\varphi} , \quad (5.109)$$

onde usamos a definição

$$I_{zz} := \sum_{k=1}^N m_k b_k^2. \quad (5.110)$$

Esse número I_{zz} é chamado **momento de inércia** do corpo rígido em relação ao eixo OZ . Substituindo (5.109) em (5.27) obtemos

$$I_{zz} \ddot{\varphi} = N_z^{ex} \quad (5.111)$$

Essa é a equação de movimento para o corpo rígido em rotação em torno do eixo OZ . As outras componentes da equação (5.27), bem como a equação (5.105) do movimento do centro de massa, dão informações suplementares sobre o movimento, impondo às forças e aos torques externos condições que garantam a fixidez do eixo de rotação. A equação (5.111) permite determinar o movimento do corpo rígido quando é dada a componente N_z^{ex} do torque externo. Nessa equação temos a derivada $\ddot{\varphi}$ da velocidade angular $\dot{\varphi}$ do corpo rígido; $\ddot{\varphi}$ é chamada **aceleração angular** do corpo rígido em torno do eixo OZ . A equação (5.111) também mostra que o momento de inércia I_{zz} é uma medida da resistência que o corpo rígido oferece a ser acelerado em sua rotação em torno do eixo OZ ; a equação (5.110) mostra que essa resistência cresce com as massas presentes e com os quadrados das distâncias delas ao eixo de rotação. Definimos **raio de giração** k_z do corpo rígido, relativo ao eixo OZ , como sendo a distância k_z dada por

$$k_z^2 = \frac{\sum_{k=1}^N m_k b_k^2}{\sum_{k=1}^N m_k}. \quad (5.112)$$

Obviamente,

$$I_{zz} = M k_z^2. \quad (5.113)$$

Portanto, o raio de giração k_z é a distância do eixo OZ em que poderíamos concentrar todas as partículas do corpo sem alterar o seu momento de inércia I_{zz} . Na sua definição (5.112), vemos que o raio de giração é uma média ponderada dos quadrados das distâncias das partículas ao eixo de rotação, sendo a ponderação realizada pelas massas das partículas.

A energia cinética do corpo rígido em rotação em torno de OZ é dada por

$$T = \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\varphi}^2. \quad (5.114)$$

Para calcular os trabalhos realizados pelas forças que agem no corpo rígido devemos levar em conta que o deslocamento infinitesimal de qualquer partícula do corpo é perpendicular ao vetor-posição da partícula e ao eixo OZ de rotação. Temos para a k -ésima partícula: $\mathbf{r}_k = b_k \hat{\mathbf{b}}_k + z_k \hat{\mathbf{z}}_k$, $\dot{\mathbf{r}}_k = b_k \dot{\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_k$ e $d\mathbf{r}_k = b_k d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}_k$. Essa última expressão pode ser escrita na forma $d\mathbf{r}_k = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_k d\varphi$, que usada na expressão (5.47) para o trabalho externo infinitesimal, dá

$$\dot{d}W^{ex} = N_z^{ex} d\varphi. \quad (5.115)$$

Supondo que cada força interna de interação têm a direção da reta que passa pelas partículas interagentes, temos que o trabalho interno é nulo,

$$\vec{d}W^{in} = 0. \quad (5.116)$$

Se $\vec{d}W^{ex}$ em (5.115) for um diferencial exato podemos associar-lhe uma energia potencial U'' , de acordo com (5.53). No caso em consideração $U'' = U$, a energia potencial total, pois (5.116) nos permite escolher a energia potencial interna como nula, $U' = 0$. Temos, então, a partir de (5.115),

$$dU = -N_z^{ex} d\varphi \quad (5.117)$$

e, conseqüentemente,

$$U(\varphi) = \int_{\varphi}^{\varphi_p} N_z^{ex} d\varphi, \quad (5.118)$$

onde φ_p é o ângulo correspondente à configuração padrão do corpo. Nesse caso, podemos usar (5.114) e (5.118) para escrever o teorema da conservação da energia (5.60) na forma

$$\frac{1}{2}I_{zz}\dot{\varphi}^2 + U(\varphi) = \text{constante}. \quad (5.119)$$

Observemos que, nesta equação e em (5.111), o movimento do corpo rígido é caracterizado por uma única variável real, o ângulo φ . Podemos, então, adaptar ao estudo da rotação do corpo rígido em torno de eixo fixo métodos desenvolvidos no capítulo 3 para tratar o movimento unidimensional de uma partícula.

Em muitos casos, um corpo rígido é dado como uma distribuição contínua de matéria. Isso é feito dando uma função contínua ρ , que associa a cada ponto P do corpo um número real $\rho(P)$ com a seguinte propriedade: a massa dm em um volume dV em torno de P é, por definição, dada por

$$dm = \rho(P)dV. \quad (5.120)$$

Na verdade, dizemos que a função ρ é a distribuição contínua de matéria.

Em uma distribuição contínua de matéria, a massa dm no volume infinitesimal dV pode ser considerada como uma partícula. Podemos, então, adaptar ao corpo contínuo, por meio de um processo de limite, diversas definições e resultados anteriormente estabelecido para distribuições discretas de matéria. A massa total M do corpo rígido contínuo é obtida de (2.138) e dada por

$$M = \int_{\mathcal{R}} \rho dV, \quad (5.121)$$

onde \mathcal{R} é a região ocupada pelo corpo rígido em consideração. De (2.139) obtemos, analogamente, que o centro de massa do corpo rígido tem posição dada por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} \rho \mathbf{r} dV. \quad (5.122)$$

De (5.110) obtemos para o momento de inércia em relação ao eixo OZ ,

$$I_{zz} = \int_{\mathcal{R}} \rho b^2 dV . \quad (5.123)$$

No caso em que o corpo rígido tem a forma de uma superfície ou de uma linha, substituímos a densidade volumar ρ pela densidade superficial ou linear, conforme o caso, e as integrais volumares que acabamos de exibir são substituídas pelas respectivas integrais lineares e superficiais.

Capítulo 6

Teoria Newtoniana da Gravitação

6.1 Lei de gravitação universal

A **lei de gravitação universal** de Newton afirma que duas partículas quaisquer de matéria se atraem com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa; a constante de proporcionalidade, que designaremos por G , é chamada **constante universal da gravitação**. Foi medida experimentalmente pela primeira vez em 1798 pelo físico inglês Henry Cavendish, por meio de uma balança de torção. O valor experimental atribuído atualmente a G é

$$G = 6,67259(85) \times 10^{-11} m^3/kg s^2 . \quad (6.1)$$

É interessante observar que outras constantes fundamentais, como a carga do elétron e , a velocidade da luz c e a constante de Planck \hbar , surgidas no cenário da Física moderna praticamente um século depois da medição de G , já foram medidas experimentalmente com precisão muito superior à precisão obtida para G .

A lei da gravitação universal de Newton descreve a força de interação entre duas partículas de matéria, *i.e.*, entre dois corpos com dimensões desprezíveis diante da distância que os separa. Parece natural que essa força seja proporcional à quantidade de matéria em cada um desses corpos em interação. Entretanto, que a quantidade de matéria seja medida por uma grandeza que foi definida para medir a inércia de um corpo, a massa inercial, é um resultado que está longe de ser óbvio. Entretanto, esse resultado é comprovado em todos os experimentos com forças gravitacionais, ou seja, as massas que aparecem na lei de gravitação universal de Newton são, precisamente, as massas inerciais, o que é um fato experimental de fundamental importância. Para melhor apreciá-lo, vejamos a seguir como é possível determinar experimentalmente a lei da gravitação universal sem supor de antemão que nela a força seja proporcional ao produto das massas inerciais das partículas interagentes.

Medindo forças entre partículas de pares isolados é possível determinar as situações em que tais forças são as que chamamos gravitacionais. De fato, supõe-se atualmente

que haja quatro tipos de forças na natureza. As forças subnucleares chamadas forte e fraca, e as forças eletromagnética e gravitacional. As forças subnucleares são de curtíssimo alcance, e não se fazem sentir a distâncias macroscópicas tais como as que estaremos considerando. Já as forças eletromagnética e gravitacional são de longo alcance, teoricamente infinito, e se fazem sentir a distâncias macroscópicas. A força eletromagnética pode ser identificada pelo seu modo de ação sobre corpos eletricamente carregados, de modo que, em princípio, podemos nos certificar de que não há forças eletromagnéticas entre partículas que pretendemos usar em um experimento. Considerando-se várias partículas e medindo-se as forças gravitacionais entre elas quando estão em diversas posições, obtemos experimentalmente que a força gravitacional sobre uma partícula i de vetor-posição \mathbf{r}_i , exercida por uma partícula j de vetor-posição \mathbf{r}_j , é dada pela expressão

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{G_{ij}}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \quad (6.2)$$

na qual r_{ij}^2 e $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ são o módulo e o unitário do vetor-posição relativa à partícula j , $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, e G_{ij} é uma constante de proporcionalidade positiva que depende apenas do par (i, j) de partículas em consideração. Portanto, pelo resultado (6.2) fica estabelecido que a força gravitacional entre qualquer par de partículas é atrativa, ao longo da reta que passa pelas partículas, e varia com o inverso do quadrado da distância entre elas. Além disso, verifica-se que as constantes de proporcionalidade associadas aos pares de partículas satisfazem a duas propriedades. A primeira é a propriedade de simetria $G_{ij} = G_{ji}$, para qualquer par (i, j) de partículas; ela confirma que as forças de interação gravitacionais obedecem à Terceira Lei de Newton. A segunda é que, para qualquer par (i, j) de partículas, as razões G_{ik}/G_{jk} tem o mesmo valor qualquer que seja a partícula k , *i.e.*, todas essas razões são iguais a uma constante que depende apenas do par (i, j) . Denotando por α_{ij} uma tal constante, temos

$$\frac{G_{ik}}{G_{jk}} = \alpha_{ij} \text{ para qualquer partícula } k. \quad (6.3)$$

Segue-se que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}$ e $\alpha_{ik}\alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, quaisquer que sejam as partículas i, j e k . Escolhendo-se uma partícula padrão p , associamos a cada partícula i a quantidade positiva $m'_i = \alpha_{ip}u_p$, na qual u_p é o símbolo da unidade em que m'_i é dada em virtude da escolha da partícula p como padrão. Obtemos, de imediato, que $\alpha_{ij} = m'_i/m'_j$. Além disso, podemos escolher uma segunda partícula q , que chamaremos de padrão secundário, e obter que a constante G_{ij} em (6.2) é proporcional ao produto das constantes m'_i e m'_j ,

$$G_{ij} = G' m'_i m'_j, \quad (6.4)$$

onde temos a constante G' , *i.e.*, uma quantidade independente do par de partículas (i, j) . Portanto, (6.2) pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_{ij} = -G' \frac{m'_i m'_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}. \quad (6.5)$$

Naturalmente, m'_i e m'_j são números reais positivos que medem a capacidade que as respectivas partículas i e j tem de exercer e sofrer a força gravitacional. Tais números são chamados **massas gravitacionais** das respectivas partículas.

É possível verificar experimentalmente que a massa gravitacional de qualquer partícula é proporcional à sua massa inercial, *i.e.*, $m_i' = \gamma m_i$, para qualquer partícula i . Conseqüentemente, podemos escrever a lei da gravitação universal na forma

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \quad (6.6)$$

na qual $G = -G'\gamma^2$, e m_i e m_j são as respectivas massa inerciais das partículas i e j . Nesse caso, a constante G em unidades SI é dada por (6.1). Escolhendo-se apropriadamente as unidades de massa gravitacional e inercial podemos ter $\gamma = 1$ e, portanto, dizer que elas são iguais.

A igualdade (ou, se preferirmos, proporcionalidade) entre a massa gravitacional e a massa inercial de um corpo já era do conhecimento de Newton e, de fato, fora utilizada por ele no desenvolvimento de sua teoria da gravitação. Hoje em dia, essa igualdade é comumente chamada **Princípio da Equivalência na forma fraca** e serviu como ponto de partida para que Einstein enunciasse o chamado Princípio da Equivalência na forma forte, ou simplesmente **Princípio de Equivalência**, um dos alicerces fundamentais sobre o qual está apoiada a Teoria da Relatividade Geral (ou teoria da Gravitação de Einstein). Esse princípio afirma que, localmente, um campo gravitacional qualquer pode ser eliminado por uma mudança de referencial.

Entre qualquer par de partículas existem forças gravitacionais dadas pela lei (6.6) e a constante G que aparece nessa lei é a mesma para todas as partículas do universo. Devido a essa propriedade a lei e a constante são ditas universais.

No capítulo 4 vimos como as leis de Kepler do movimento planetário podem ser deduzidas a partir da Lei de gravitação (6.6). Também é possível fazer a dedução inversa, isto é, obter a lei de gravitação (6.6) a partir das três leis de Kepler. Esse caminho partindo das leis de Kepler foi o seguido por Newton para chegar de modo bem fundamentado à sua lei de gravitação universal.

A força gravitacional entre dois corpos extensos é, em geral, mais complicada do que a força gravitacional entre duas partículas. A teoria desenvolvida a seguir visa proporcionar métodos de cálculo da força gravitacional entre corpos quaisquer.

6.2 Força e campo gravitacionais

Seja um sistema de N partículas, de massas m_1, m_2, \dots, m_N , localizadas nos pontos P_1, P_2, \dots, P_N , respectivamente. Os vetores-posição dessas partículas são dados por $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, ..., $\mathbf{r}_N = \overrightarrow{OP_N}$. Consideremos a força gravitacional que esse sistema exerce sobre uma partícula localizada em um ponto P , *i.e.*, com vetor-posição $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$. A força é dada por

$$\mathbf{F}_m = - \sum_{j=1}^N G \frac{m m_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (6.7)$$

A força por unidade de massa m , \mathbf{F}_m/m , não depende da massa m , mas apenas do ponto do espaço onde supomos estar a massa. A razão \mathbf{F}_m/m define, portanto, uma

função de posição no espaço, que chamamos **campo gravitacional**. Representando-o por \mathbf{g} , temos que o campo gravitacional no ponto P é

$$\mathbf{g}(P) := \frac{\mathbf{F}_m}{m}. \quad (6.8)$$

Uma vez que $P = O + \mathbf{r}$, temos $\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(O + \mathbf{r})$, mas também escrevemos, por simplicidade, $\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(\mathbf{r})$. Usando a equação (6.7), obtemos a expressão do campo gravitacional devido à distribuição de N partículas,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = - \sum_{j=1}^N G \frac{m_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (6.9)$$

Dizemos que esse é o campo gravitacional **gerado** pela distribuição de N partículas. As grandezas envolvidas nessa definição do campo gravitacional \mathbf{g} estão ilustradas na figura 6.1. Notemos que nessa fórmula do campo gravitacional aparecem as posições das partículas e a posição em que estamos considerando o campo gravitacional, isto é, a do ponto P de vetor posição $\mathbf{r} = \vec{OP}$. Esse ponto onde consideramos o campo gravitacional é chamado **ponto de observação**. As partículas ou massas do sistema que geram o campo gravitacional são chamadas **fontes do campo gravitacional**.

Evidentemente, o campo gravitacional gerado por um conjunto de partículas é a soma vetorial dos campos gravitacionais que seriam gerados por cada partícula do conjunto se as outras não estivessem presentes. Essa propriedade é o **Princípio de Superposição dos campos gravitacionais**.

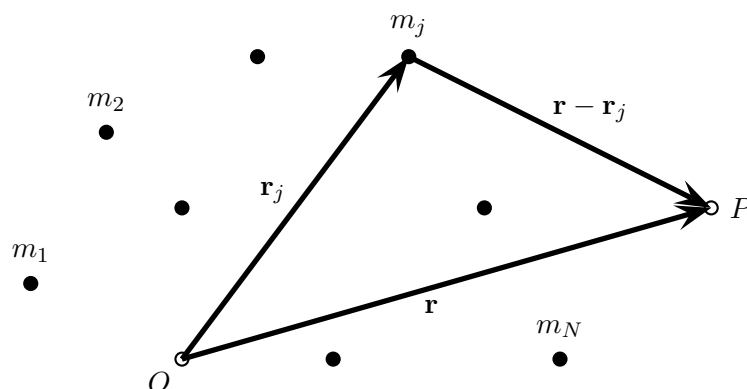


Figura 6.1: Partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_N , localizadas nos respectivos pontos P_1, P_2, \dots, P_N , geram um campo gravitacional no ponto P ; os vetores-posição das partículas são $\mathbf{r}_j = P_j - O$ ($j = 1, 2, \dots, N$), e o do ponto P é $\mathbf{r} = P - O$.

Nem todos os sistemas físicos são convenientemente descritos como uma distribuição discreta de matéria com N corpos puntiformes. Há sistemas que são apropriadamente descritos como uma distribuição contínua de matéria e os campos gravitacionais que eles geram são dados pela definição (6.8), mas não pela expressão (6.9). Os campos

gravitacionais não podem, em geral, ser definidos em todos os pontos do espaço. O campo \mathbf{g} da equação (6.9), por exemplo, não é definido em pontos onde estão as partículas que o geram; isso significa que \mathbf{g} não é definido em P_1, P_2, \dots, P_N . De um modo geral, tomamos como domínio de definição do campo uma região aberta \mathcal{D} do espaço euclidiano \mathcal{E} . Escrevemos, pois,

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathcal{D} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ : P &\longrightarrow \mathbf{g}(P), \end{aligned} \quad (6.10)$$

No caso da equação (6.9), por exemplo, \mathcal{D} é o espaço \mathcal{E} menos os pontos P_1, P_2, \dots, P_N ocupados pelas partículas do sistema, $\mathcal{D} = \mathcal{E} \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$.

Por simplicidade, em nosso estudo do campo gravitacional desenvolvemos a teoria considerando, primeiramente, o campo gerado pelo sistema discreto de N partículas; posteriormente, adaptamos os resultados da teoria a outros campos gravitacionais.

Uma vez conhecido o campo gravitacional, podemos obter a força gravitacional sobre qualquer partícula em qualquer ponto de \mathcal{D} ; basta usar a equação (6.8). Se uma partícula de massa m é posta no ponto de vetor posição \mathbf{r} , ela sofre uma força gravitacional dada pelo produto de sua massa pelo valor do campo gravitacional na posição da partícula,

$$\mathbf{F}_m = m\mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (6.11)$$

É evidente que (6.9) e (6.11) são equivalentes à equação (6.7), mas (6.9) e (6.11) indicam uma maneira mais prática de se calcular forças sobre partículas postas em presença das N partículas que exercem a força (a razão é muito simples, mas vale a pena refletir sobre ela).

Até agora exploramos o fato da força gravitacional (6.6) ser proporcional ao produto das massas das partículas interagentes. De fato, essa propriedade nos motivou a definir o conceito de campo gravitacional. A seguir, prosseguimos no desenvolvimento da teoria explorando também outras propriedades dessa força, como o seu caráter central e sua proporcionalidade ao inverso do quadrado da distância entre as partículas interagentes.

6.3 Potencial gravitacional

A força de interação gravitacional entre duas partículas é central, com o centro de força dado pelo ponto ocupado pela partícula atratora, a partícula de vetor posição \mathbf{r}_j no caso da equação (6.6). De fato, podemos escrever a força gravitacional (6.6) na forma típica de uma força central, $\mathbf{F}_{kj} = \mathcal{F}_{kj}(r_{kj}) \hat{\mathbf{r}}_{kj}$, onde $\mathcal{F}_{kj}(r_{kj}) = -Gm_k m_j / r_{kj}^2$. Essa propriedade tem conseqüências importantes no campo gravitacional e, para explorá-la, definimos o vetor

$$\boldsymbol{\xi}_j := \mathbf{r} - \mathbf{r}_j. \quad (6.12)$$

Em termos desse vetor temos que o campo gravitacional gerado pela j -ésima partícula no ponto de posição \mathbf{r} é dado por $\psi_j(\boldsymbol{\xi}_j) \hat{\boldsymbol{\xi}}$, onde a função ψ_j é definida por $\psi_j(\boldsymbol{\xi}_j) =$

$-Gm_j/\xi_j^2$. Como conseqüência, o campo gravitacional (6.9) tem a forma

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \psi_j(\xi_j) \hat{\boldsymbol{\xi}}_j, \quad (6.13)$$

Obtemos, então,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^N \psi_j(\xi_j) d\xi_j = d \left[\sum_{j=1}^N \Psi_j(\xi_j) \right], \quad (6.14)$$

onde Ψ_j é uma função primitiva de ψ_j . O resultado (6.14) mostra que, associada a cada campo gravitacional \mathbf{g} existe uma função real \mathcal{G} tal que

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -d\mathcal{G}(\mathbf{r}). \quad (6.15)$$

Uma tal função é chamada **potencial gravitacional** associado ao campo gravitacional \mathbf{g} . Também dizemos que o potencial \mathcal{G} é gerado pelas partículas ou massas que geram o campo gravitacional \mathbf{g} . O sinal menos em (6.15) é puramente convencional. Graças a ele podemos dizer que uma partícula em um campo gravitacional tende, pela ação do campo, para as regiões de mais baixo potencial gravitacional. É claro que \mathcal{G} é definida a menos de uma constante aditiva. Na verdade, \mathcal{G} associa um número real a cada ponto do domínio do campo gravitacional \mathbf{g} , *i.e.*, o potencial associado ao campo gravitacional (6.10), é uma função

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: P \longmapsto \mathcal{G}(P), \end{aligned} \quad (6.16)$$

Notemos que a equação (6.15) mostra que as integrais de linha de \mathbf{g} não dependem do caminho escolhido. Desse modo, temos que o potencial gravitacional definido em (6.15) pode ser escrito como

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{g}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (6.17)$$

onde \mathbf{r}_p é a posição de um ponto fixo arbitrário que chamamos ponto-padrão desse potencial. O resultado (6.14) não somente garante a existência de um potencial \mathcal{G} como permite escrever

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = - \sum_{j=1}^N \Psi_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|). \quad (6.18)$$

De acordo com a definição de gradiente de um campo escalar, temos $d\mathcal{G} = (\nabla\mathcal{G}) \cdot d\mathbf{r}$, onde $d\mathcal{G}$ é a variação elementar de \mathcal{G} no deslocamento elementar $d\mathbf{r}$. Portanto, temos a seguinte equação, equivalente a (6.15),

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\mathcal{G}(\mathbf{r}) \quad (6.19)$$

e, conseqüentemente,

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (6.20)$$

Um campo cujo rotacional é nulo é dito **irrotacional**. A equação (6.20) nos garante que o campo gravitacional é irrotacional.

Decorre também de (6.14) que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (6.21)$$

para qualquer curva fechada \mathcal{C} em \mathcal{D} , *i.e.*, a circulação do campo gravitacional é nula em qualquer curva fechada de seu domínio. Dessa propriedade obtemos a existência de um potencial gravitacional para o campo em consideração. De fato, (6.21) garante a existência da função \mathcal{G} definida por (6.17), que goza da propriedade (6.15) que, por sua vez, define \mathcal{G} como potencial do campo gravitacional \mathbf{g} .

No caso em que \mathbf{g} é um campo gravitacional com domínio \mathcal{D} simplesmente conexo, qualquer curva \mathcal{C} em \mathcal{D} é a borda $\partial\mathcal{S}$ de uma superfície \mathcal{S} toda contida em \mathcal{D} . Esse é o caso do campo gravitacional (6.9) gerado pela distribuição discreta de N partículas. Então, podemos aplicar ao campo gravitacional o teorema de Stokes,

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.22)$$

Nesse caso, o caráter irrotacional do campo gravitacional implica que sua circulação é nula em qualquer curva fechada de seu domínio, *i.e.*, (6.22) implica em (6.21) que, por sua vez, garante a existência de um potencial para o campo gravitacional em consideração. Em suma, se o campo gravitacional tem domínio simplesmente conexo, ele tem um potencial caso seja irrotacional.

Agora, passemos a explorar o fato de que a força gravitacional entre duas partículas é não apenas central, mas de um tipo muito especial, o inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa, *i.e.*, a função ψ_j em (6.13) é dada por

$$\psi_j(\xi_j) = -\frac{Gm_j}{\xi_j^2}. \quad (6.23)$$

Como consequência dessa propriedade, temos que Ψ_j em (6.14) pode ser escrita como

$$\Psi_j(\xi_j) = \frac{Gm_j}{\xi_j}. \quad (6.24)$$

Substituindo essa expressão em (6.18), obtemos

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -\sum_{j=1}^N G \frac{m_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad (6.25)$$

que é a expressão de um potencial do campo gravitacional gerado pela distribuição discreta de N partículas. Uma outra escolha de primitiva Ψ_j resultaria em um potencial \mathcal{G}' que iria diferir de \mathcal{G} por uma constante C ,

$$\mathcal{G}'(\mathbf{r}) = \mathcal{G}(\mathbf{r}) + C. \quad (6.26)$$

A escolha (6.24) leva \mathcal{G} a gozar da propriedade

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.27)$$

Pelo desenvolvimento da teoria, vemos que o potencial gravitacional é uma função escalar que contém todas as informações sobre o campo gravitacional, que é uma função vetorial. Como uma função real é, normalmente, mais simples do que uma vetorial, o uso do potencial pode simplificar o estudo do campo gravitacional em diversas situações. No cálculo do campo gravitacional, por exemplo, podemos evitar a tarefa de fazer a soma vetorial (6.9) e, alternativamente, fazer a soma escalar (6.25) seguida do cálculo do gradiente em (6.19).

6.4 Lei de Gauss da gravitação

Agora, vamos explorar uma consequência importante de características essenciais da força gravitacional. A sua proporcionalidade inversa com o exato quadrado da distância e sua direção ao longo da reta que une as partículas nos permitirá expressar o campo gravitacional gerado por uma partícula em termos de um ângulo sólido. Como consequência, obteremos que o fluxo do campo gravitacional através de uma superfície fechada não depende das posições das partículas que geram o campo. A proporcionalidade direta da força gravitacional com a massa faz com que tal fluxo seja proporcional à massa total na região no interior da superfície.

Usando (6.23) em (6.13), obtemos

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = - \sum_{j=1}^N \frac{Gm_j}{\xi_j^2} \hat{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \mathbf{n} dA = - \sum_{j=1}^N Gm_j d\Omega_j, \quad (6.28)$$

onde dA é a área de um elemento de superfície na posição \mathbf{r} , \mathbf{n} é o unitário normal ao elemento de superfície que define sua orientação no espaço e $d\Omega_j$ é o ângulo sólido que subentende o dito elemento de superfície orientada e tem vértice na posição \mathbf{r}_j , conforme ilustrado na figura 6.2, *i.e.*,

$$d\Omega_j := \frac{\hat{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \mathbf{n} dA}{\xi_j^2} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} dA. \quad (6.29)$$

Seja agora uma região \mathcal{R} em \mathcal{E} cuja borda $\partial\mathcal{R}$ esteja no domínio \mathcal{D} de \mathbf{g} . Com essa hipótese excluimos a possibilidade de algum ponto de $\partial\mathcal{R}$ coincidir com a posição de uma massa puntiforme. Vamos orientar a superfície fechada $\partial\mathcal{R}$ com a normal \mathbf{n} apontando de dentro para fora da região \mathcal{R} . Temos que o ângulo sólido total subentendido pela superfície fechada $\partial\mathcal{R}$ é igual a 4π se o vértice do ângulo estiver na região no interior à superfície e, zero se estiver na região exterior, *i.e.*,

$$\oint_{\partial\mathcal{R}} d\Omega_j = \begin{cases} 4\pi & \text{se o vértice de } d\Omega_j \in \mathcal{R}, \\ 0 & \text{se o vértice de } d\Omega_j \notin \overline{\mathcal{R}}, \end{cases} \quad (6.30)$$

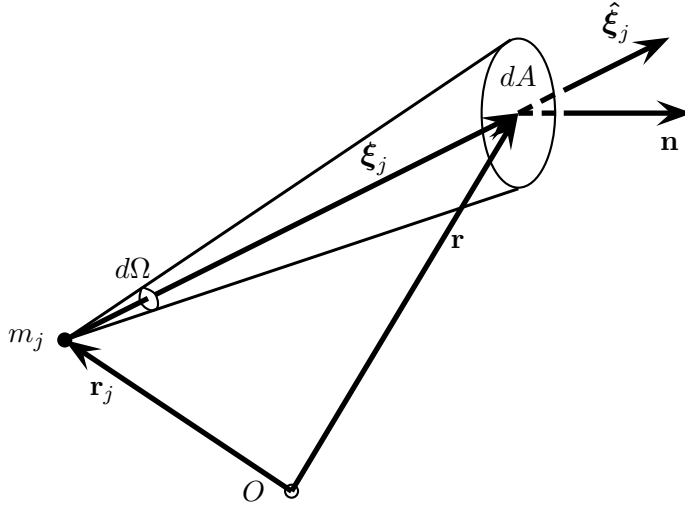


Figura 6.2: Ângulo sólido $d\Omega_j$ centrado na posição da j -ésima partícula.

onde $\overline{\mathcal{R}}$ é o fecho da região interior \mathcal{R} . Integrando (6.28) em $\partial\mathcal{R}$, e usando (6.30), obtemos

$$\oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = -4\pi G \sum_{j=1}^N m_j \begin{cases} 1 & \text{se a massa } m_j \text{ estiver dentro de } \mathcal{R}, \\ 0 & \text{se a massa } m_j \text{ estiver fora de } \overline{\mathcal{R}}. \end{cases} \quad (6.31)$$

Vemos que o fato de que o campo gravitacional gerado por uma partícula ser proporcional à sua massa faz com que o membro direito dessa equação seja proporcional à soma das massas das partículas que estão dentro da região \mathcal{R} . Denotando por $m_{\mathcal{R}}$ a massa total do subsistema contido na região \mathcal{R} , obtemos a igualdade

$$\oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = -4\pi G m_{\mathcal{R}}, \quad (6.32)$$

que é chamada **lei de Gauss da gravitação**. É importante notar que, embora no membro direito da lei de Gauss (6.32) apareça apenas a massa $m_{\mathcal{R}}$ do subsistema contido na região \mathcal{R} , o campo gravitacional \mathbf{g} no membro esquerdo é gerado por todas as massas do sistema, dentro ou fora de \mathcal{R} . A integral da componente normal de um campo vetorial em uma superfície orientada é chamada fluxo do campo através da superfície no sentido da orientação. A lei de Gauss (6.32) afirma que o fluxo do campo gravitacional para fora de uma superfície fechada é proporcional à massa na região interior à superfície.

A lei de Gauss (6.32) e a equação (6.21) constituem-se nas chamadas **equações fundamentais do campo gravitacional em forma global** ou integral. Como o desenvolvimento da teoria nos mostra, nelas estão expressas por meio de integrais de linha e de superfície as propriedades mais fundamentais do campo gravitacional.

6.5 Distribuições contínuas de massa

Em teoria da gravitação é comum encontrarmos problemas nos quais a matéria não está concentrada em partículas bem espaçadas entre si, mas distribuída **continuamente** em uma certa região \mathcal{M} do espaço. Por distribuição contínua entendemos uma função contínua

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : P &\longmapsto \rho(P) , \end{aligned} \quad (6.33)$$

com a seguinte propriedade: a massa em um volume elementar dV em torno de um ponto P de \mathcal{M} é dada por

$$dm = \rho(P)dV , \quad (6.34)$$

ou, usando-se o vetor-posição $\mathbf{r} = \vec{OP}$,

$$dm = \rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} . \quad (6.35)$$

Chamamos $\rho(P)$ de densidade volumar de massa em $P \in \mathcal{M}$. A massa total da distribuição, denotada por M , é

$$M = \int_{\mathcal{M}} \rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} . \quad (6.36)$$

Se a distribuição de massa é uniforme, como no caso de corpos homogêneos, temos que a densidade volumar é a mesma em todos os pontos de \mathcal{M} e igual a $\rho(\mathbf{r}) = M/V$, onde V é o volume de \mathcal{M} . Observemos que muitas vezes é conveniente abrir mão da continuidade de ρ na fronteira de \mathcal{M} e estender sua definição para pontos fora de \mathcal{M} , por meio da prescrição: $\rho(P) = 0$ se $P \notin \overline{\mathcal{M}}$.

Em muitas situações é útil considerar as idealizações nas quais toda a massa de um sistema está distribuída em uma superfície ou em uma linha. Para descrever tais situações definimos os conceitos de densidade superficial e linear. Densidade superficial σ é uma função contínua definida em uma superfície \mathcal{S} no espaço \mathcal{E} ,

$$\begin{aligned} \sigma &: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: P \longmapsto \sigma(P) , \end{aligned}$$

e dotada da propriedade de que um elemento da superfícies \mathcal{S} , em torno de $P \in \mathcal{S}$ e com área dA , tem massa dm dada por

$$dm = \sigma(P)dA . \quad (6.37)$$

Densidade linear λ é uma função contínua definida em uma linha \mathcal{L} no espaço \mathcal{E} ,

$$\begin{aligned} \lambda &: \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: P \longmapsto \lambda(P) , \end{aligned}$$

e dotada da propriedade de que um elemento da curva \mathcal{L} , em torno de $P \in \mathcal{L}$ e com comprimento $d\ell$, tem massa dm dada por

$$dm = \lambda(P)d\ell , \quad (6.38)$$

No caso de uma distribuição contínua temos as fórmulas correspondentes ao campo gravitacional (6.9),

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{M}} G \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (6.39)$$

e ao potencial gravitacional (6.25),

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{M}} G \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (6.40)$$

As integrais nestas equações podem ser estendidas a todo o espaço se definirmos $\rho = 0$ fora de \mathcal{M} . A figura 6.3 mostra as variáveis envolvidas nas equações (6.39) e (6.40). Naturalmente, fórmulas análogas a essas equações podem ser escritas para distribuições lineares e superficiais.

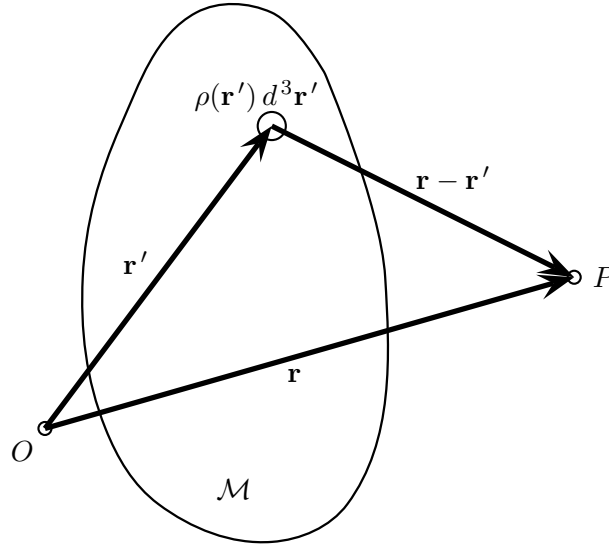


Figura 6.3: Variáveis do cálculo de $\mathbf{g}(P)$ ou $\mathcal{G}(P)$ gerados por uma distribuição contínua ρ na região \mathcal{M} .

Notemos que o campo gravitacional de uma distribuição contínua de matéria pode ser obtido calculando-se a integral vetorial (6.39) ou, alternativamente, calculando-se a integral escalar (6.40) e o gradiente na equação (6.19).

Uma distribuição de massa não só gera um campo como também sofre forças gravitacionais. A força sobre um elemento de massa dm em um ponto P , em correspondência com (6.11), é dada por

$$d\mathbf{F} = dm \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (6.41)$$

onde $\mathbf{r} = \vec{OP}$ e $d^3\mathbf{r}$ é o volume ocupado por dm .

Agora, consideremos a lei de Gauss (6.32) no caso de distribuições contínuas de matéria. Usando (6.34), temos em uma região arbitrária \mathcal{R} ,

$$m_{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (6.42)$$

que, substituída na lei de Gauss (6.32), nos leva a

$$\oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = -4\pi G \int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}) dV . \quad (6.43)$$

Aplicando nessa equação o teorema da divergência de Gauss,

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{g} dV = \oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dA , \quad (6.44)$$

obtemos

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{g} dV = - \int_{\mathcal{R}} 4\pi G \rho dV . \quad (6.45)$$

Como \mathcal{R} é uma região arbitrária, concluímos que

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho . \quad (6.46)$$

As equações (6.20) e (6.46) são chamadas **equações fundamentais do campo gravitacional em forma local**, ou diferencial. Suas soluções, com condições de contorno apropriadas, são capazes de descrever qualquer campo gravitacional. Essas equações permitem encontrar campos gravitacionais que podemos não conseguir calcular usando diretamente as equações (6.39) ou (6.40).

Substituindo em (6.46) a expressão (6.19) do campo gravitacional \mathbf{g} em termos do potencial gravitacional, obtemos

$$\nabla^2 \mathcal{G} = 4\pi G \rho , \quad (6.47)$$

que é conhecida como **equação de Poisson** para o potencial gravitacional. Obtendo-se uma solução para essa equação e substituindo-a em (6.19), obtemos um campo \mathbf{g} que satisfaz às equações fundamentais (6.20) e (6.46). Em pontos do espaço onde não há massa, a equação de Poisson reduz-se à chamada **equação de Laplace** para o potencial gravitacional,

$$\nabla^2 \mathcal{G} = 0 . \quad (6.48)$$

Notemos que o formalismo desta seção, desenvolvido para descrever distribuições contínuas de massa, pode também descrever distribuições discretas, se usarmos funções deltas de Dirac. Uma distribuição de partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_N , localizadas pelos respectivos vetores-posição $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, é dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N m_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) . \quad (6.49)$$

Usando essa densidade na teoria desta seção reobtemos resultados das seções anteriores para a distribuição discreta de N partículas.

Finalizamos esta seção com um exemplo do cálculo do campo gravitacional, o gerado por uma casca esférica homogênea de matéria. Usaremos o par de equações (6.40) e (6.19). Seja a o raio da casca \mathcal{S} e $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ a sua densidade superficial; devido à homogeneidade da distribuição, a função σ tem um valor constante que denotaremos também por σ . Tomando a origem no centro da casca, conforme mostra a figura 6.4, obtemos

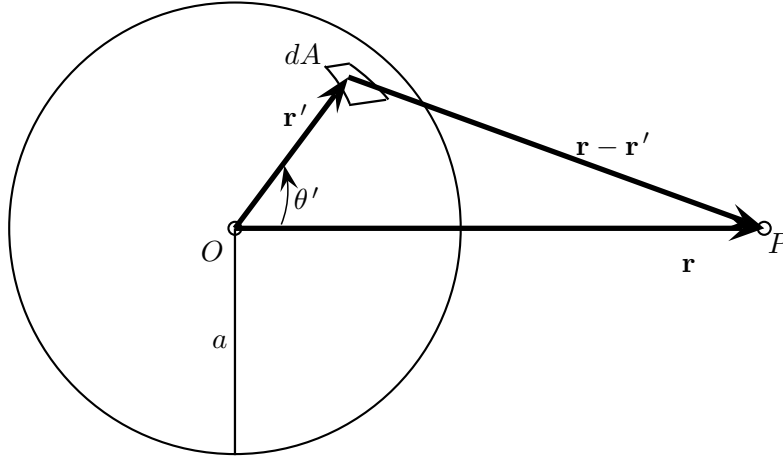


Figura 6.4: Casca esférica homogênea de raio a gerando campo gravitacional em um ponto P .

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{S}} G \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA'. \quad (6.50)$$

Vamos usar um sistema de eixos com OZ ao longo de \mathbf{r} , isto é, $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{z}}$. Usando para \mathbf{r}' coordenadas esféricas neste sistema de eixos, obtemos que a distância entre um elemento de massa da distribuição e o ponto de observação P é

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \sqrt{\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{r}'^2} = \sqrt{r^2 - 2ra \cos \theta' + a^2}. \quad (6.51)$$

O elemento de área no qual está o elemento de massa é dado por $dA' = r' d\theta' r' \sin \theta' d\varphi' = a^2 \sin^2 \theta' d\theta' d\varphi'$, e a casca toda é levada em consideração fazendo-se as variáveis de integração varrerem o domínio dado por $0 \leq \varphi' < 2\pi$ e $0 \leq \theta' \leq \pi$. Portanto, obtemos

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = - \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\theta' G \frac{\sigma a^2 \sin \theta'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta'}}. \quad (6.52)$$

O cálculo dessa integral não apresenta dificuldades,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{r}) &= - \frac{2\pi G \sigma a^2}{2ar} \int_0^\pi d\theta' \frac{2ar \sin \theta'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta'}} = - \frac{\pi G \sigma a}{r} 2\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta'} \Big|_{\theta'=0}^{\theta'=\pi} \\ &= - \frac{2\pi G \sigma a}{r} \left[\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar} - \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar} \right] = - \frac{2\pi G \sigma a}{r} \left[|r + a| - |r - a| \right]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Eliminando σ da expressão anterior em favor da massa total da casca, $M = \sigma 4\pi a^2$, obtemos

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r} \frac{1}{2a} \left(|r+a| - |r-a| \right), \quad (6.54)$$

ou seja,

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = - \begin{cases} GM/r & \text{se } r \geq a, \\ GM/a & \text{se } r < a. \end{cases} \quad (6.55)$$

O resultado anterior pode ser escrito numa forma compacta se utilizarmos a função degrau de Heaviside,

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r} \left\{ \frac{r}{a} \Theta_H(a-r) + \Theta_H(r-a) \right\}. \quad (6.56)$$

A partir desse potencial gravitacional, obtemos o campo gravitacional

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla \mathcal{G}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -GM \hat{\mathbf{r}}/r^2 & \text{se } r > a, \\ \mathbf{0} & \text{se } r < a. \end{cases} \quad (6.57)$$

Temos, portanto, que uma casca de matéria esférica e homogênea gera na região fora dela um campo gravitacional igual ao que toda a sua massa geraria se estivesse concentrada no seu centro; na região interna à casca o campo gravitacional é nulo. Observemos que é possível fazer um cálculo que deixa perfeitamente claro que o campo no interior da casca é nulo porque na fórmula da força gravitacional entre partículas o expoente da distância entre elas é exatamente igual a 2.

6.6 Multipolos gravitacionais

Consideremos uma distribuição de matéria em uma região cotada do espaço, isto é, a região está contida em alguma esfera de raio suficientemente grande. A medida que nos afastamos da distribuição, mais e mais podemos considerá-la como uma partícula. É pois intuitivo que a grandes distâncias da distribuição o seu campo gravitacional seja aproximadamente o de uma partícula de massa igual à massa total da distribuição. Para explorar essa idéia de modo mais preciso, consideremos o potencial gravitacional (6.40) de uma distribuição de matéria $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{M}} G \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (6.58)$$

e escrevamos para o denominador no integrando

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')(r'/r) + (r'/r)^2}}. \quad (6.59)$$

Seja r'_{\max} o valor máximo de $|\mathbf{r}'|$ para pontos de \mathcal{M} e consideremos pontos de observação distantes o bastante para termos

$$r \gg r'_{\max}, \quad (6.60)$$

de modo a podermos expandir a raiz inversa que aparece em (6.59) em potências de r/r' . Obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \left(\frac{r'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \left(\frac{r'}{r}\right)^n, \quad (6.61)$$

onde o coeficiente P_n é o polinômio de Legendre de ordem n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Voltando à expressão (6.59) do inverso da distância temos, então,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \frac{r'^n}{r^{n+1}}. \quad (6.62)$$

Substituindo esta expressão em (6.58), obtemos

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = - \sum_{n=0}^{\infty} G \frac{M_n(\hat{\mathbf{r}})}{r^{n+1}}, \quad (6.63)$$

onde usamos a definição

$$M_n(\hat{\mathbf{r}}) := \int_{\mathcal{M}} r'^n P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (6.64)$$

Devemos observar que $M_n(\hat{\mathbf{r}})$ não depende da distância r , mas apenas da maneira como a distribuição está orientada em relação a \mathbf{r} (e, naturalmente, das características da distribuição e da origem em relação à qual definimos as posições das diversas partes do sistema).

O polinômio de Legendre P_n é de ordem n e os 4 primeiros deles são dados por

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \text{e} \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \quad (6.65)$$

É imediato que

$$M_0(\hat{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{M}} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = M, \quad (6.66)$$

onde M é a massa total da distribuição de matéria. Usando (6.66) em (6.63), temos

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r} - G \frac{M_1(\hat{\mathbf{r}})}{r^2} - G \frac{M_2(\hat{\mathbf{r}})}{r^3} - \dots. \quad (6.67)$$

O primeiro termo dessa expansão é o potencial gravitacional de uma partícula com massa igual à massa total do sistema. É o termo dominante a grandes distâncias,

$$r \gg r'_{\max} \implies \mathcal{G}(\mathbf{r}) \approx -G \frac{M}{r}, \quad (6.68)$$

que é um resultado esperado. A expansão (6.63) é chamada **expansão multipolar**, ou em multipolos, do potencial gravitacional. Essa expansão é particularmente útil quando o cálculo do potencial exato (6.58) é por demais complicado, mas a soma de

alguns termos da série (6.63) é suficiente como uma boa aproximação do potencial. Em muitas situações interessantes é suficiente truncar a série após o terceiro termo.

O termo $-GM_n(\hat{\mathbf{r}})/r^{n+1}$ na expansão multipolar (6.63) é chamado **termo de multipolo de ordem n** ou **termo de 2^n -polo**. Desse modo, o primeiro termo, que descreve o potencial de uma massa puntiforme, é o termo de monopolo. A própria massa puntiforme é chamada monopolo gravitacional. O termo seguinte, de dipolo, é proporcional a

$$M_1(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}} \cdot M\mathbf{R}, \quad (6.69)$$

onde \mathbf{R} é a posição do centro de massa da distribuição de matéria. O termo de dipolo mede o quanto a origem do sistema de coordenadas está deslocada do centro de massa e desaparece se tomarmos as posições em relação ao centro de massa. Façamos isso, de modo que a primeira correção ao termo de monopolo será dada pelo termo de quadrupolo gravitacional, que é proporcional a $M_2(\hat{\mathbf{r}})$. Se levarmos em conta que o potencial de uma distribuição de matéria esfericamente simétrica apresenta somente o termo de monopolo em (6.67), podemos dizer que os termos de multipolos de ordem superior descrevem o quanto a distribuição desvia-se da simetria esférica.

Na expansão multipolar (6.67), o primeiro termo a descrever o desvio da simetria esférica é, portanto, o termo de quadrupolo, no qual $M_2(\hat{\mathbf{r}})$ pode ser escrito na forma

$$M_2(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2r^2} \mathbf{r} \cdot Q(\mathbf{r}), \quad (6.70)$$

onde definimos o operador linear

$$Q : \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \quad (6.71)$$

por meio de

$$Q(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{M}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \left[3\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r} \right]. \quad (6.72)$$

O operador Q é chamado **operador quadrupolar** da distribuição de massa descrita pela densidade volumar ρ . É fácil demonstrar que Q é um operador linear simétrico de traço nulo. Em uma base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ os elementos da matriz de Q são

$$Q_{ij} = \int_{\mathcal{M}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \left(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.73)$$

e podemos escrever

$$Q_{ji} = Q_{ij}, \quad Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0. \quad (6.74)$$

Agora, suponhamos que a distribuição de massa seja simétrica em relação a um eixo, digamos \mathcal{OZ} . Nesse caso, temos em (6.73) que $Q_{ij} = \delta_{ij}Q_{ii}$, já que, para $i \neq j$, cada contribuição de $x'_i x'_j$ no integrando de (6.73) é anulada por uma contribuição $-x'_i x'_j$. Temos, pois,

$$Q_{ij} = \delta_{ij}Q_{ii}.$$

Além disso, a mesma simetria garante que $Q_{11} = Q_{22}$. Usando esse resultado na segunda igualdade em (6.74), podemos escrever

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2}Q_{33} . \quad (6.75)$$

Desse modo, no caso de distribuição de massa com simetria axial em torno do terceiro eixo, Q_{33} determina completamente o operador de quadrupolo Q . O número Q_{33} é chamado **momento quadrupolar** da distribuição de massa e pode ser representado por Q se não houver perigo de confusão com o operador quadrupolar. Usando (6.75) em (6.70), obtemos

$$M_2(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{4r^2} Q_{zz} = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{4} Q_{zz} , \quad (6.76)$$

onde θ é o ângulo entre \mathcal{OZ} e \mathbf{r} , ou seja, $\cos \theta = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$. Conseqüentemente, a contribuição do termo quadrupolar ao potencial na expansão (6.63), que denotaremos por \mathcal{G}_2 , é

$$\mathcal{G}_2(\mathbf{r}) = -G \frac{Q_{zz}}{4r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) . \quad (6.77)$$

Para uma distribuição esfericamente simétrica temos $Q_{zz} = 0$, um resultado esperado e facilmente obtível da expressão (6.73) para $i = j = z$,

$$Q_{zz} = \int_{\mathcal{M}} d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (2x_3'^2 - x_1'^2 - x_2'^2) . \quad (6.78)$$

Com efeito, no caso esfericamente simétrico as integrais provenientes dos termos $2x_1'^2$, $x_2'^2$ e $x_3'^2$, se cancelam.

Agora, suponhamos que a distribuição de massa, além de axialmente simétrica, seja uniforme. Nessas condições, temos $Q_{zz} > 0$ se a distribuição for prolata e $Q_{zz} < 0$ se a distribuição for oblata. No caso de um elipsoide de revolução, em torno do eixo \mathcal{OZ} , obtemos

$$Q_{zz} = \frac{2}{5} M (c^2 - a^2) , \quad (6.79)$$

onde c é o semi-eixo do elipsóide ao longo de \mathcal{OZ} e a é o semi-eixo ortogonal a \mathcal{OZ} . Esse resultado é particularmente importante porque a Terra é, aproximadamente, um elipsóide de revolução oblato, cujo raio equatorial a excede o semi-eixo polar c por cerca de 21,5 km. Chamamos **achatamento** ou **oblatura** do elipsóide de revolução a grandeza

$$\varepsilon := \frac{a - c}{a} . \quad (6.80)$$

O achatamento da Terra é aproximadamente 1/300. Se a Terra tivesse densidade uniforme, seu momento quadrupolar seria dado por

$$Q_{zz} = \frac{2}{5} M_{\oplus} (c^2 - a^2) \approx -\frac{4}{5} M_{\oplus} a^2 \varepsilon , \quad (6.81)$$

onde M_{\oplus} é a massa da Terra. Esse resultado para o momento quadrupolar da Terra pode se melhorado se levarmos em conta que a Terra não é uma distribuição de

massa uniforme, pois é mais densa na sua parte central do que na superficial. Essa inhomogeneidade pode ser levada em conta usando, no lugar de (6.81), o seguinte momento quadrupolar:

$$Q_{zz} = -\frac{4}{5} M_{\oplus} a^2 \lambda, \quad (6.82)$$

onde λ é um número positivo menor do que ε , que devemos escolher de modo a obter de (6.82) a melhor descrição possível do momento quadrupolar da Terra.

6.7 Energia potencial gravitacional

A força sobre uma partícula de massa m e posição \mathbf{r} no domínio de um campo gravitacional \mathbf{g} é, de acordo com (6.11), dada por $\mathbf{F}_m = m\mathbf{g}(\mathbf{r})$. Portanto, de (6.21) decorre imediatamente que a força gravitacional é conservativa, *i.e.*,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (6.83)$$

para qualquer curva fechada \mathcal{C} . De acordo com a teoria exposta na seção 6.3 podemos associar à partícula no campo gravitacional uma energia potencial dada por

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r}, \quad (6.84)$$

onde \mathbf{r}_p é a posição padrão escolhida. Tal energia é o trabalho que seria realizado pela força gravitacional \mathbf{F}_m , se a partícula fosse deslocada da posição \mathbf{r} em que se encontra até a posição padrão \mathbf{r}_p .

Sabemos que, associado ao campo gravitacional \mathbf{g} , há um potencial gravitacional \mathcal{G} dado por (6.17). Supondo que o ponto padrão desse potencial seja o mesmo usado na energia potencial em (6.84), obtemos

$$U(\mathbf{r}) = m\mathcal{G}(\mathbf{r}). \quad (6.85)$$

Desta fórmula obtemos que o potencial gravitacional em um ponto é a energia potencial por unidade de massa que uma massa teria se posta neste ponto. Obtemos, também, que o trabalho que a força gravitacional realizaria sobre uma partícula de massa m , que fosse do ponto \mathbf{r} em que se encontra até o ponto padrão, é o produto da massa pelo potencial gravitacional em \mathbf{r} .

Consideremos agora um sistema de N partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_N , sujeitas apenas a forças gravitacionais, internas e externas. Usando a teoria já exposta neste capítulo, e a desenvolvida na seção 5.4, é fácil concluir que o trabalho realizado por essas forças gravitacionais, em qualquer movimento hipotético do sistema, só depende das configurações inicial e final do sistema. Conseqüentemente, podemos associar a cada configuração $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ do sistema uma energia potencial $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, que, de acordo com (5.67), é o trabalho que as forças gravitacionais realizariam sobre o sistema se ele fosse da configuração $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ até uma configuração padrão $(\mathbf{r}_{1P}, \dots, \mathbf{r}_{NP})$.

Vamos calcular a energia potencial gravitacional no caso em que não há forças gravitacionais externas e a configuração padrão é aquela em que todas as partículas

encontram-se infinitamente afastadas entre si. Essa energia potencial pode ser obtida somando-se o trabalho realizado quando a primeira partícula vai ao infinito com as $N - 1$ restantes em repouso, com o trabalho realizado quando a segunda partícula vai ao infinito com as $N - 2$ partículas restantes em repouso e assim sucessivamente, até que somemos o trabalho realizado quando a N -ésima e última partícula vai ao infinito. Desse modo, obtemos

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^{N-1} m_i \sum_{j=i+1}^N \frac{-Gm_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (6.86)$$

onde usamos as equações (6.85) e (6.25). Podemos escrever (6.86) na forma

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{-Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (6.87)$$

Essa equação também pode ser escrita como

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathcal{G}_{\hat{i}}(\mathbf{r}_i), \quad (6.88)$$

onde $\mathcal{G}_{\hat{i}}$ é o potencial gerado por todas as partículas do sistema, com exceção da i -ésima.

No caso de uma distribuição volumar de massa $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, temos

$$U(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}) \mathcal{G}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (6.89)$$

onde, por conveniência futura, integramos sobre uma região \mathcal{R} que contém \mathcal{M} . Usando (6.46) e a identidade

$$\nabla \cdot (\mathbf{g} \mathcal{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{g}) \mathcal{G} + \mathbf{g} \cdot \nabla \mathcal{G}, \quad (6.90)$$

obtemos, a partir de (6.89),

$$U(\rho) = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{g}(\mathbf{r})^2 d^3\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\partial\mathcal{R}} \mathcal{G}(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}, \quad (6.91)$$

onde usamos o teorema de Gauss da divergência para obter a integral na superfície $\partial\mathcal{R}$. Vamos supor que \mathcal{M} seja cotada e que seja tomado o limite em que \mathcal{R} torna-se todo o espaço \mathcal{E} . Nesse caso a integral de superfície em (6.91) vai a zero. De fato, no integrando dessa integral $d^2\mathbf{r} = r^2 d\Omega$ e, nesse limite, de acordo com (6.63), temos $\mathcal{G}(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \sim r^{-3}$. Portanto,

$$U(\rho) = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{g}(\mathbf{r})^2 d^3\mathbf{r}. \quad (6.92)$$

Notemos que essa fórmula dá a energia potencial gravitacional interna da distribuição ρ a partir de um único dado, o campo gravitacional gerado por essa distribuição.

Capítulo 7

Cordas Vibrantes

Neste capítulo estudaremos as vibrações transversais de uma corda tensa. Este é um tópico em mecânica dos meios contínuos que é rico em aplicações e resultados, e que serve como preparação para o estudo de sistemas contínuos mais complicados.

7.1 Equação de movimento para uma corda vibrante

Em nosso estudo da corda vibrante, ela será idealizada como perfeitamente flexível e bem fina. Digamos que a área da sua seção reta, denotada por a , é pequena o bastante para que os elementos da corda possam ser considerados como partículas, *i.e.*, localizáveis por um único vetor-posição. Também supomos que a corda é tensionada por forças aplicadas em suas extremidades e, quando em equilíbrio, *i.e.*, sem vibrações, tem um comprimento que denotaremos por ℓ . Muitas propriedades da corda podem ser estudadas sem mencionar seu comprimento e, em alguns casos, é útil a idealização de que a corda tem comprimento infinito.

Suponhamos que uma corda esteja sujeita à ação de forças externas e internas, de tal modo que ela fique sempre tensa e que haja para ela uma configuração de equilíbrio. Na configuração de equilíbrio cada elemento da corda é localizado por coordenadas que denotaremos por x , y e z . Com isso, o elemento fica localizado pela trinca $\bar{r} = (x, y, z)$ ou, se preferirmos, pelo vetor-posição $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$. Uma configuração arbitrária da corda fica especificada pelos deslocamentos que os elementos da corda sofrem a partir de suas posições de equilíbrio. O deslocamento, no instante t , do elemento que na configuração de equilíbrio encontra-se em (x, y, z) , é representado por $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ou, se preferirmos, por $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Obviamente, se a corda se encontra na configuração de equilíbrio, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$, qualquer que seja \mathbf{r} . Das definições de \mathbf{r} e $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, obtemos que $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ é o vetor-posição no instante t do elemento da corda cujo vetor-posição na configuração de equilíbrio é \mathbf{r} . A velocidade e a aceleração desse elemento são dadas, respectivamente, por $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ e $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)/\partial t^2$. Notemos que, para t fixo, a função $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ dá a configuração da corda no instante t , que também chamamos forma ou perfil da corda. Em contrapartida, para \mathbf{r} fixo, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ dá a função-movimento do elemento da corda que tem \mathbf{r} por posição de equilíbrio. Finalmente, a função \mathbf{u} das variáveis \mathbf{r} e t dá o movimento da corda inteira.

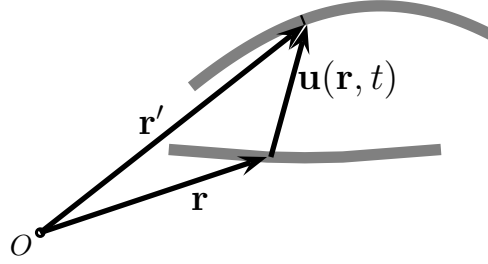


Figura 7.1: Duas configurações de um trecho de uma corda, a de equilíbrio e uma outra arbitrária.

Estamos interessados na situação em que a corda é retilínea na configuração de equilíbrio. Esse é o caso de cordas suspensas nas quais a tensão é tão grande que as demais forças como, *e.g.*, o peso da corda, não afetam perceptivelmente a forma retilínea da configuração de equilíbrio; bons exemplos concretos dessa situação são dados pelas cordas de um violino afinado. Se a configuração de equilíbrio é retilínea, escolhamos um dos eixos coordenados ao longo da corda, digamos o eixo \mathcal{OX} . A posição de equilíbrio de cada ponto da corda é dada, então, pelo vetor-posição $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}}$. *i.e.*, pela coordenada x . Nesse caso, denotamos por $\mathbf{u}(x, t)$ o deslocamento do elemento que na configuração de equilíbrio se encontra em x ; a posição desse elemento no instante t é $\mathbf{r}' = x\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Temos, então,

$$\mathbf{u}(x, t) = u_x(x, t)\hat{\mathbf{x}} + u_y(x, t)\hat{\mathbf{y}} + u_z(x, t)\hat{\mathbf{z}}. \quad (7.1)$$

Esse deslocamento é composto pelo deslocamento $u_x(x, t)\hat{\mathbf{x}}$, na direção da configuração de equilíbrio da corda, e pelo deslocamento $\mathbf{u}_\perp(x, t) = u_y(x, t)\hat{\mathbf{y}} + u_z(x, t)\hat{\mathbf{z}}$, perpendicular a essa direção. O primeiro é chamado **deslocamento longitudinal** no instante t do elemento da corda em x , e o último, **deslocamento transverso** do elemento nesse instante.

Vamos nos restringir ao estudo de pequenas oscilações da corda a partir de sua configuração de equilíbrio; essa hipótese requer de todos os elementos da corda que tenham pequenas inclinações relativas ao eixo da configuração de equilíbrio. Vamos considerar que a configuração de equilíbrio da corda seja uma linha orientada no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} e que em qualquer instante essa orientação se mantenha na curva definida pela configuração da corda. Diremos que a curva definida pela corda tem orientação no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} , ou orientação da esquerda para a direita. Seja o elemento da corda que na posição de equilíbrio se encontra entre x e $x + dx$, e que no instante t se encontra entre \mathbf{r}' e $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$; naturalmente, $d\mathbf{r}' = (dx + du_x(x, t))\hat{\mathbf{x}} + du_y(x, t)\hat{\mathbf{y}} + du_z(x, t)\hat{\mathbf{z}}$ e, portanto,

$$d\mathbf{r}' = \left[\left(1 + \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial u_y(x, t)}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right] dx. \quad (7.2)$$

O comprimento desse elemento na configuração de equilíbrio é $|dx|$ e, no instante t ,

$|ds| = |d\mathbf{r}'|$, de modo que

$$\frac{|ds|}{|dx|} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y(x, t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z(x, t)}{\partial x}\right)^2}. \quad (7.3)$$

Notemos que nessas equações aparecem derivadas parciais porque as quantidades consideradas são todas em um instante fixo t .

Agora, vamos precisar o significado de pequenas oscilações pela suposição de que as derivadas parciais $\partial u_x(x, t)/\partial x$, $\partial u_y(x, t)/\partial x$ e $\partial u_z(x, t)/\partial x$ sejam pequenas o bastante para que seus produtos e potências superiores sejam desprezíveis. Com essa suposição, obtemos de (7.3),

$$\frac{|ds|}{|dx|} = 1 + \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x}. \quad (7.4)$$

Seja $\mathbf{t} = d\mathbf{r}'/ds$, o vetor unitário tangente à configuração da corda na posição \mathbf{r}' . Na aproximação que estamos considerando, ele é dado por

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial u_y(x, t)}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial x} \hat{\mathbf{z}}. \quad (7.5)$$

Desejamos aplicar a Segunda Lei de Newton a cada elemento da corda para determinar os seus movimentos possíveis, *i.e.*, quais são os modos possíveis de oscilação da corda tensa. Para isso, necessitamos saber quais são as forças que agem na corda, em particular a função-força da tensão que a mantém esticada. Vamos denotar por $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}(x, t)$ a tensão no ponto \mathbf{r}' e no instante t , exercida pela porção da corda à direita de \mathbf{r}' sobre porção da corda à esquerda de \mathbf{r}' , tal como indicado na figura 7.2. Uma

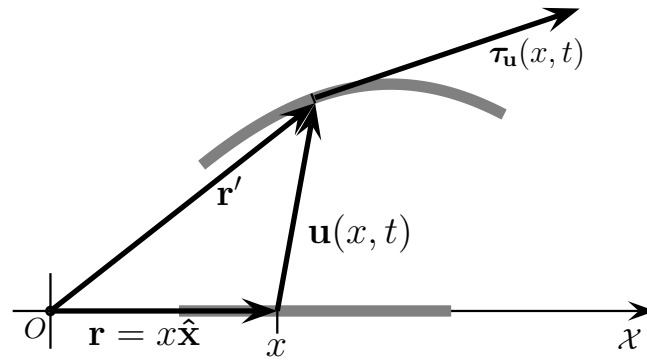


Figura 7.2: A figura mostra um trecho da corda na configuração de equilíbrio retilhada, ao longo do eixo \mathcal{OX} , e o mesmo trecho em uma configuração arbitrária no instante t . No ponto \mathbf{r}' desse trecho está indicada a tensão $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}(x, t)$ que a parte da corda à direita de \mathbf{r}' exerce na parte à esquerda, no instante t .

vez que a corda é perfeitamente flexível, a tensão tem exatamente a direção da corda em cada ponto, *i.e.*, a direção do vetor tangente unitário no ponto,

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}(x, t) = \tau_{\mathbf{u}}(x, t) \mathbf{t}, \quad (7.6)$$

onde denotamos por $\tau_{\mathbf{u}}(x, t)$ o módulo da tensão. Quando a corda está em repouso na configuração de equilíbrio, sua tensão é constante e a mesma em toda a corda; supomos que seja uma tensão conhecida, representamos o seu módulo por τ e o denominamos **tensão de equilíbrio**. A função-força que dá a tensão na corda para pequenas elongações de seus elementos é a **Lei de Hooke**. Essa lei relaciona a variação do módulo da tensão por unidade de área de seção reta em um elemento da corda, $(\tau_{\mathbf{u}}(x, t) - \tau)/a$, com a extensão desse elemento por unidade de seu comprimento original, $(|ds| - |dx|)/|dx|$. A Lei de Hooke estabelece que essas duas variações são proporcionais (*ut tensio, sic vis*)¹

$$\frac{\tau_{\mathbf{u}}(x, t) - \tau}{a} = E \frac{|ds| - |dx|}{|dx|}, \quad (7.7)$$

onde E é o módulo de Young, a constante de proporcionalidade da lei, uma quantidade que depende apenas do material de que é feita a corda. Levando em conta a aproximação de pequenas oscilações, podemos usar (7.4) para escrever a Lei de Hooke (7.7) na forma

$$\frac{\tau_{\mathbf{u}}(x, t) - \tau}{a} = E \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x}. \quad (7.8)$$

Finalmente, usando (7.8) e (7.5) em (7.6), obtemos a função-força da tensão na aproximação de pequenas oscilações,

$$\tau_{\mathbf{u}}(x, t) = \left(\tau + aE \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{x}} + \tau \frac{\partial u_y(x, t)}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + \tau \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial x} \hat{\mathbf{z}}. \quad (7.9)$$

Seja, no instante t , o elemento da corda entre \mathbf{r}' e $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$. Para fixar as idéias, podemos supor que $d\mathbf{r}'$ aponte no sentido positivo da corda, de modo que ds seja positivo e, na configuração de equilíbrio, também dx seja positivo. Seja $\sigma(x)$ a densidade linear da corda no ponto x da configuração de equilíbrio; com isso, a massa do elemento de corda é $dm = \sigma(x) dx$ (naturalmente, a densidade no elemento de corda varia quando seu comprimento muda de dx para ds). O elemento de corda é tensionado pelo restante da corda à sua direita e à sua esquerda, pelas respectivas forças $\tau_{\mathbf{u}}(x + dx, t)$ e $-\tau_{\mathbf{u}}(x, t)$, tal como ilustrado na figura 7.3. Consideremos a possibilidade de que no instante t uma força externa $d\mathbf{F}^{ex}(x, t)$ esteja agindo sobre o elemento de corda. Tendo em vista hipóteses anteriores, essa força não deve afetar o caráter retilíneo da configuração de equilíbrio da corda. Também supomos que $d\mathbf{F}^{ex}(x, t)$ seja uma força proporcional ao comprimento do elemento de corda na configuração de equilíbrio, $d\mathbf{F}^{ex}(x, t) = \mathbf{f}(x, t) dx$, onde $\mathbf{f}(x, t)$, a força externa por unidade de comprimento que age no elemento de corda no instante t , é uma dada função da posição e velocidade do elemento de corda nesse instante e, possivelmente, do próprio instante. Um exemplo importante de uma tal força externa é o de uma força de atrito na corda imersa em algum meio viscoso. Não havendo outras forças sobre a corda, a Segunda Lei de Newton aplicada ao elemento da corda é

$$dm \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} = \tau_{\mathbf{u}}(x + dx, t) - \tau_{\mathbf{u}}(x, t) + d\mathbf{F}^{ex}(x, t) \quad (7.10)$$

¹Essa lei, apresentada originalmente na forma do criptograma “ceiinossttuv”, foi publicada por Robert Hooke (1635-1703) em sua obra “The True Theory of Elasticity or Springiness” (1676).

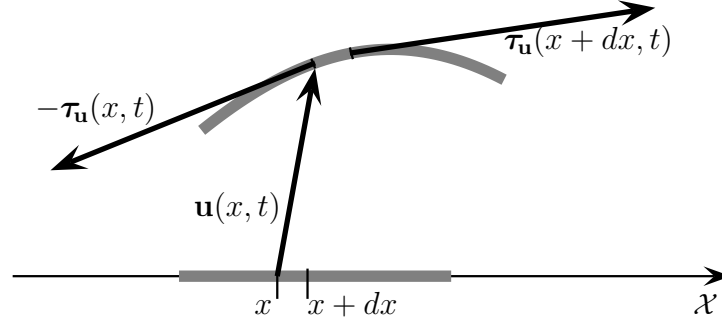


Figura 7.3: Tensões exercidas no elemento de corda pelas porções contíguas da corda.

ou seja,

$$\sigma(x) dx \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} = \tau_{\mathbf{u}}(x + dx, t) - \tau_{\mathbf{u}}(x, t) + \mathbf{f}(x, t) dx, \quad (7.11)$$

donde obtemos

$$\sigma(x) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{\mathbf{u}}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{f}(x, t). \quad (7.12)$$

Substituindo nessa equação a expressão (7.9) para a tensão, temos

$$\sigma(x) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\tau + aE \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{x}} + \tau \frac{\partial u_y(x, t)}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + \tau \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right] + \mathbf{f}(x, t) \quad (7.13)$$

e, conseqüentemente,

$$\sigma(x) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} = aE \frac{\partial^2 u_x(x, t)}{\partial x^2} \hat{\mathbf{x}} + \tau \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} \hat{\mathbf{y}} + \tau \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{f}(x, t). \quad (7.14)$$

Essa equação é equivalente às três equações escalares

$$\sigma(x) \frac{\partial^2 u_x(x, t)}{\partial t^2} = aE \frac{\partial^2 u_x(x, t)}{\partial x^2} + f_x(x, t), \quad (7.15)$$

$$\sigma(x) \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} + f_y(x, t) \quad \text{e} \quad \sigma(x) \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} + f_z(x, t). \quad (7.16)$$

A primeira dessas equações descreve as chamadas **vibrações longitudinais** da corda e as duas últimas, as chamadas **vibrações transversais**.

Embora seja possível imaginar muitas situações interessantes nas quais a densidade da corda não seja uniforme, faremos agora a hipótese de que ela seja dada por uma constante que denotaremos simplesmente por σ . Com isso as equações de movimento (7.15) e (7.16) se reduzem a

$$\sigma \frac{\partial^2 u_x(x, t)}{\partial t^2} = aE \frac{\partial^2 u_x(x, t)}{\partial x^2} + f_x(x, t), \quad (7.17)$$

$$\sigma \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} + f_y(x, t) \quad \text{e} \quad \sigma \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} + f_z(x, t). \quad (7.18)$$

Essas três equações diferenciais parciais têm a mesma forma, na qual a derivada segunda da função incógnita em relação ao tempo é igual à soma de um termo proporcional à derivada segunda em relação à posição com um termo livre. Essas características definem o que chamamos **equação inhomogênea da onda**. A função incógnita que satisfaz essa equação é chamada **função de onda** e o movimento que ela descreve é chamado **movimento ondulatório** ou, simplesmente, **onda**. As soluções u_x da equação (7.17) são chamadas **ondas longitudinais** da corda e as soluções u_y e u_z das equações (7.18), **ondas transversais** da corda. Também nos referimos a $\mathbf{u}_\perp = u_x \hat{\mathbf{x}} + u_y \hat{\mathbf{y}}$ como função de onda transversa da corda; a direção de $\mathbf{u}_\perp(x, t)$ é chamada direção de polarização da onda no ponto x e no instante t , e a função de onda \mathbf{u}_\perp , bem como a onda que ela descreve, são ditas **vetoriais**. Se a direção de polarização é sempre a mesma em todos os pontos, dizemos que a onda é **linearmente polarizada** nessa direção.

Naturalmente, basta estudar uma das três equações em (7.17) e (7.18) para sabermos lidar matematicamente com as demais. Pretendemos nos fixar de agora em diante em ondas transversais linearmente polarizadas, levando em conta que há cordas nas quais é possível estabelecer tais ondas. De fato, é fácil estabelecer ondas com essas características preponderantes em fios pouco elásticos, finos, muito tensos e sujeitos a pequenas oscilações. Supomos, é claro que não haja força externa longitudinal sobre eles, *i.e.*, $f_x = 0$ na equação de onda longitudinal (7.17), que torna-se trivialmente satisfeita pela ausência de oscilações longitudinais, *i.e.*, por $u_x = 0$. Vamos considerar uma situação como essa, de modo que nos restam apenas as duas equações idênticas (7.18) de oscilações transversais. Por simplicidade acrescentamos, então, a hipótese de que a onda seja linearmente polarizada, digamos na direção \mathcal{OY} . Com isso, vamos nos limitar de agora em diante ao estudo da primeira equação em (7.18), na qual pasaremos a denotar u_y e f_y por u e f , respectivamente. Temos, portanto, a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{f(x, t)}{\tau}. \quad (7.19)$$

na qual c é a constante definida por

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \quad (7.20)$$

e o termo livre $-f(x, t)/\tau$ é chamado de termo de **fonte** da equação da onda inhomogênea.

Dalambertiano é o operador diferencial \square definido por

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (7.21)$$

Em termos do dalambertiano, a equação da onda (7.19) toma a forma

$$\square u(x, t) = -\frac{f(x, t)}{\tau}. \quad (7.22)$$

No caso particular em que não há forças externas, a equação (7.19) reduz-se à equação da onda homogênea

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = 0. \quad (7.23)$$

que descreve as possíveis oscilações da corda sujeita somente à força de tensão.

Agora, vamos obter a solução geral da equação de onda homogênea, devida a D'Alembert. Inicialmente, observamos que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t). \quad (7.24)$$

Essa fatoração do operador d'alambertiano sugere o uso das variáveis ξ e η , definidas por

$$\xi = x - ct \quad \text{e} \quad \eta = x + ct. \quad (7.25)$$

Temos, então,

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (7.26)$$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = 4 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (7.27)$$

Substituindo este resultado na equação de onda (7.23), obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \quad (7.28)$$

Essa equação afirma que $\partial u / \partial \xi$ não depende de η , o que nos permite concluir que

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = h(\xi), \quad (7.29)$$

onde h é uma função arbitrária. Dessa equação, obtemos

$$u = f(\xi) + g(\eta), \quad (7.30)$$

onde g é uma função arbitrária e f é uma primitiva de h . Usando as definições (7.25) nesse resultado, obtemos, finalmente,

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (7.31)$$

O primeiro termo representa uma configuração da corda de formato f propagando-se para a direita com celeridade c . O segundo, representa uma configuração da corda de formato g propagando-se para a esquerda com a mesma celeridade c . As funções f e g representam o que chamamos, respectivamente, **ondas progressivas**, para a direita e a esquerda. A constante c é chamada **velocidade de propagação** dessas ondas progressivas. Notemos que f e g são indeterminadas em constantes aditivas que se cancelam, *i.e.*, a solução de D'Alembert (7.31) não é afetada pelas mudanças $f \mapsto$

$f + C$ e $g \mapsto g - C$ das ondas progressivas. Notemos também que a superposição das duas ondas progressivas f e g , uma para a direita e a outra para a esquerda, não é progressiva se tanto f quanto g forem diferentes de zero.

A única imposição feita às funções f e g na solução de D'Alembert (7.31), é que devem ser duplamente diferenciáveis; exceto por isso, tais funções são arbitrárias e podem descrever qualquer movimento da corda. Para descrever um movimento específico, f e g têm que ser fixadas. Veremos que isso é feito pelas chamadas condições iniciais e condições de contorno. As condições iniciais dão o estado de movimento da corda inteira em um dado instante, chamado de inicial, digamos $t = 0$. As condições de contorno dão informações sobre o movimento dos extremos da corda em qualquer instante.

7.2 Condições inicial e de contorno para a corda vibrante

Em um problema real, a corda tem um certo comprimento ℓ na configuração de equilíbrio. Denotando por x_i e x_f as coordenadas das extremidades esquerda e direita da corda, respectivamente, temos $\ell = x_f - x_i$. Como fizemos a hipótese de pequenas vibrações, podemos considerar o comprimento da corda como aproximadamente constante durante o movimento. É útil considerar as situações idealizadas em que a corda estende-se indefinidamente para a direita ($x_f \rightarrow \infty$) ou para a esquerda ($x_i \rightarrow -\infty$), ou ainda, cordas sem extremidades ($x_i \rightarrow -\infty$ e $x_f \rightarrow \infty$).

Consideremos o caso de uma corda de comprimento ℓ estendida de $x = 0$ até $x = \ell$. Que condições devemos impor às extremidades da corda para que ela permaneça tensa e para que a equação da onda determine univocamente o movimento a partir das condições iniciais? Fisicamente, esperamos que a condição de extremos fixos satisfaça essas propriedades. Vamos, pois, considerar a condição de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(\ell, t) = 0, \quad (7.32)$$

para todo instante t do movimento. Uma tal condição na qual a função de onda é nula nas extremidades da corda, é chamada **condição de contorno de Dirichlet**.

Quanto à condição inicial, lembremo-nos de que a equação da onda para a corda tensa é simplesmente a Segunda Lei de Newton aplicada aos elementos da corda. Portanto, devemos esperar que as condições iniciais sejam dadas pelas posições e velocidades de todos os elementos da corda no instante inicial, digamos $t = 0$. Representando por $u_0(x)$ e $v_0(x)$ a posição inicial e a velocidade inicial do elemento da corda em x , vamos considerar a seguinte condição inicial para a corda,

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x) \quad (x \in [0, \ell]). \quad (7.33)$$

A função u_0 dá o perfil inicial da corda, enquanto a função v_0 dá a distribuição inicial de velocidades da corda, também denominada perfil de velocidades no instante inicial. Para que a corda não seja rompida, a função u_0 deve ser contínua e a função

Figura 7.4: Deslocamentos inicial $u_0(x)$ e velocidade inicial $v_0(x)$ do elemento de corda em x .

v_0 tampouco pode ser completamente arbitrária. Temos, também, que a condição de contorno (7.32) impõem à condição inicial (7.33) as restrições

$$u_0(0) = u_0(\ell) = 0 \quad \text{e} \quad v_0(0) = v_0(\ell) = 0. \quad (7.34)$$

As condições de contorno devem determinar a energia transferida para a corda pelas forças externas e as condições iniciais devem determinar a energia da corda no instante inicial. Passemos à discussão do balanço de energia na corda vibrante. Com esse intuito, reescrevemos (7.19) na forma

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (7.35)$$

Passamos, agora, ao procedimento usual para demonstrar o teorema do trabalho-energia. Começamos por multiplicar a equação anterior pela velocidade do elemento de corda,

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.36)$$

Temos

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (7.37)$$

e

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Substituindo esses resultados em (7.36), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + f(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.39)$$

Os significados dos termos dessa equação são claros. O termo $(\sigma/2)(\partial u/\partial t)^2$ é a energia cinética por unidade de comprimento, $(\tau/2)(\partial u/\partial x)^2$ é a energia potencial elástica por unidade de comprimento e a soma desses dois termos é a energia interna da corda por unidade de comprimento. O termo $\tau(\partial u/\partial x)(\partial u/\partial t)$ corresponde à potência que os elementos da corda fornecem aos elementos à sua esquerda; a derivada deste termo em relação a x dá a potência por unidade de comprimento fornecida ao elemento de corda em x . O último termo é a potência por unidade de comprimento fornecida pela fonte externa f .

Para obter as energias para a corda inteira, integramos (7.39) ao longo do comprimento da corda,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_i}^{x_f} + \int_{x_i}^{x_f} f(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} dx. \quad (7.40)$$

Representando por $E^{in}(t)$ a energia interna da corda, *i.e.*,

$$E^{in}(t) := \int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (7.41)$$

podemos escrever

$$\frac{dE^{in}(t)}{dt} = \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_i}^{x_f} + \int_{x_i}^{x_f} f(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} dx. \quad (7.42)$$

Essa equação estabelece que a taxa de variação da energia interna da corda se deve à potencia fornecida às extremidades da corda e à potencia fornecida pela força externa ao longo da corda.

Na situação em que não há forças externas ao longo da corda, $f = 0$, a equação anterior reduz-se a

$$\frac{d}{dt} \int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_i}^{x_f}. \quad (7.43)$$

Se, além disso, as condições de contorno forem de extremidades presas, conforme descrito em (7.32), o membro direito de (7.43) é nulo, *i.e.*, não há trabalho realizado pelas forças externas nas extremidades da corda. Conseqüentemente, a energia interna da corda é constante,

$$E^{in}(t) = \text{constante} = E^{in}(0), \quad (7.44)$$

onde $E^{in}(0)$ é a energia interna inicial, dada pelas condições iniciais (7.33),

$$E(0) = \int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{1}{2} \sigma v_0^2(x) + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{du_0(x)}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (7.45)$$

Agora, vamos usar (7.44), a conservação da energia interna da corda, para mostrar que a equação de onda (7.23) tem uma única solução que satisfaz à condição de contorno de Dirichlet (7.32) e à condição inicial (7.33). Inicialmente, devemos observar

que a equação da onda (7.23) é linear, *i.e.*, se u_1 e u_2 forem duas soluções da equação, então $\alpha u_1 + \beta u_2$, com α e β constantes, também será solução; expressamos essa propriedade dizendo também que as ondas obedecem o **princípio da superposição** de soluções. Consideremos duas soluções u_1 e u_2 que satisfazem à condição de contorno de Dirichlet (7.32) e à mesma condição inicial (7.33). Pelo princípio da superposição, a diferença $w = u_2 - u_1$ também será solução da equação de onda, satisfará à condição de contorno de Dirichlet (7.32) e à seguinte condição inicial,

$$w(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (x \in [0, \ell]) . \quad (7.46)$$

Devido à condição de contorno de Dirichlet, o membro direito de (7.43) é nulo. Portanto, temos para a solução w ,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0 \quad (7.47)$$

e, portanto,

$$\int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{t=0} dx . \quad (7.48)$$

Devido à condição inicial (7.46), o membro direito dessa equação é nulo e, consequentemente,

$$\int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0 . \quad (7.49)$$

Uma vez que o integrando nessa equação nunca é negativo, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 , \quad (7.50)$$

em qualquer posição, em qualquer instante, *i.e.*, w é uma constante. Tendo em vista as condições iniciais e de contorno, a constante é nula, $w = 0$, ou seja, $u_1 = u_2$, o que vale dizer que só há uma solução para o problema.

O problema de achar uma solução para a equação de onda (7.23) que satisfaça à condição inicial (7.33), em que são dados a configuração da corda e sua distribuição de velocidades, é chamado **problema de Cauchy** para a corda vibrante. Acabamos de demonstrar, portanto, que o problema de Cauchy para a corda vibrante sob condições de contorno de Dirichlet (7.32) tem solução única, caso exista alguma solução. Para demonstrar que existe uma solução, podemos recorrer à solução geral de D'Alembert (7.31) e mostrar que ela é capaz de satisfazer à condição de contorno de Dirichlet (7.32) e a qualquer condição inicial da forma (7.33). Entretanto, demonstraremos essa existência encontrando a solução por um outro método, devido a Bernoulli, na próxima seção. No momento, vamos nos limitar a discutir como a solução geral de D'Alembert (7.31) se adapta à condição de contorno de extremidades fixas, *i.e.*, à condição de Dirichlet (7.32).

Inicialmente, a condição no extremo esquerdo da corda, $u(0, t) = 0$, impõe à solução $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ a restrição $f(-ct) = -g(ct)$ e, dado que t é arbitrário, concluímos que $f(\xi) = -g(-\xi)$ para qualquer ξ . Conseqüentemente, a solução deve possuir a forma

$$u(x, t) = f(x - ct) - f(-x - ct), \quad (7.51)$$

e, desse modo, u é uma função ímpar de x ,

$$u(-x, t) = -u(x, t), \quad (7.52)$$

i.e., antissimétrica em relação a $x = 0$. Agora, impondo que a solução anterior satisfaça a condição no extremo direito da corda, $u(\ell, t) = 0$, obtemos a restrição $f(\ell - ct) = f(-\ell - ct)$; uma vez que t é arbitrário, obtemos que f é uma função periódica, com período 2ℓ , ou seja, $f(\xi + 2\ell) = f(\xi)$ para qualquer ξ . Isso implica que u é uma função periódica em x , com período 2ℓ ,

$$u(x + 2\ell, t) = u(x, t). \quad (7.53)$$

Também u é periódica no tempo, com período $2\ell/c$,

$$u(x, t + 2\ell/c) = u(x, t). \quad (7.54)$$

Vimos que a condição de contorno de extremos fixos (7.32) implica em (7.52) e (7.53), *i.e.*, na antissimetria e periodicidade da função de onda. É fácil verificar a recíproca: as condições de antissimetria e periodicidade implicam a condição de contorno de extremo fixo.

Após demonstrar que a solução geral de D'Alembert satisfaz à condição de contorno de Dirichlet, restringimos tal solução ao intervalo $[0; \ell]$. Uma vez que a restrição é sempre possível, fica demonstrado que há soluções para o movimento da corda que satisfazem às condições de contorno de extremos fixos. Portanto, foi possível começar pela solução geral de D'Alembert, definida em toda a reta real, e ao final restringi-la a uma solução no intervalo $[0; \ell]$ em que se encontra a corda com extremos fixos em $x = 0$ e $x = \ell$. Também é possível o processo inverso. De fato, dada uma solução para o movimento da corda, *i.e.*, uma função $u(x, t)$ definida para $x \in [0, \ell]$, podemos sempre estendê-la a todo o eixo real usando (7.52) e (7.53). Essa extensão representa o movimento de uma corda fictícia infinita, ao longo de todo o eixo de coordenada x ; no intervalo $[0, \ell]$ essa corda fictícia coincide com a corda real. É muitas vezes conveniente trabalhar com a solução estendida à corda fictícia infinita e só restringi-la ao intervalo $[0, \ell]$ quando for necessário fazer alguma afirmação sobre a corda real. Notemos, também, que a extensão é facilmente feita em dois passos, conforme indicado na figura 7.5. No primeiro, a função definida em $[0, \ell]$ é estendida antissimetricamente ao intervalo $[-\ell, 0]$; no segundo, essa primeira extensão é periodicamente estendida ao resto do eixo real.

Além da condição de extremos fixos, outras condições de contorno para a corda vibrante são possíveis e também úteis, como, por exemplo, as condições que permitem deslocamentos verticais nas extremidades.

Figura 7.5: A extensão ímpar do trecho $[0, \ell]$ em tracejado e extensão periódica do trecho $[-\ell, \ell]$ em pontilhado.

7.3 Modos normais da corda vibrante

Nesta seção, encontraremos a solução do problema de Cauchy para a corda vibrante com extremos fixos. Dito de outro modo, encontraremos uma solução da equação da onda (7.23) que satisfaça à condição de contorno de Dirichlet (7.32) e, além disso, à condição inicial (7.33), na qual são dadas a configuração inicial e a distribuição inicial de velocidades da corda. Com isso, ficará demonstrada a existência da solução do problema de Cauchy (a unicidade dessa solução já foi demonstrada na seção anterior). A solução será encontrada pelo método de Bernoulli. A equação da onda será resolvida pelo método de separação de variáveis, no qual a condição de contorno é facilmente incorporada à solução; para impor a condição inicial à solução usaremos séries de Fourier. As idéias seguidas na solução do problema são aplicáveis a muitos outros problemas importantes além deste da corda vibrante.

Um método de solução de equações diferenciais parciais lineares, como a equação de onda (7.23), consiste em procurar soluções de um certo tipo particular e simples. Depois, tais soluções são superpostas de modo a gerar uma função que, além de ser solução, satisfaça às condições inicial e de contorno do problema. No caso presente, começamos por procurar soluções $u(x, t)$ da equação da onda que sejam da forma

$$u(x, t) = X(x) \Theta(t) , \quad (7.55)$$

onde X e Θ são funções de uma única variável, X da posição e Θ do tempo. Com isso, as duas variáveis da função u ficam separadas em duas funções, x na função X e t na função Θ . Por esse motivo, esse método é chamado **método de separação de variáveis**. A separação de variáveis reduz o problema de resolver a equação diferencial parcial ao problema de resolver equações diferenciais ordinárias. Veremos que ele é bem sucedido no caso da equação da onda.

Substituindo (7.55) na equação da onda (7.23), ela toma a forma

$$\frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} . \quad (7.56)$$

Sendo o membro esquerdo dessa equação uma função somente de x e o membro direito somente de t , ambos os membros devem ser iguais a uma constante, pois x e t são

independentes. Vamos chamar tal constante de $-\omega^2$ (o sinal menos e o quadrado são por conveniência futura). Desse modo, obtemos da equação anterior as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0 \quad (7.57)$$

e

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega^2 \Theta = 0. \quad (7.58)$$

A solução geral da equação (7.57) é dada por

$$X(x) = C \operatorname{sen} \frac{\omega x}{c} + C' \cos \frac{\omega x}{c}, \quad (7.59)$$

onde C e C' são constantes arbitrárias. A solução geral de (7.58) é

$$\Theta(t) = D \cos \omega t + D' \operatorname{sen} \omega t, \quad (7.60)$$

onde D e D' são constantes arbitrárias.

As soluções (7.55) da equação da onda satisfazem à condição de contorno de Dirichlet (7.32) se, e somente se, as funções (7.59) as satisfazem. Portanto, devemos ter $X(0) = 0$ e $X(\ell) = 0$, quem implicam $C' = 0$ e

$$\operatorname{sen} \frac{\omega \ell}{c} = 0. \quad (7.61)$$

Essa última condição é equivalente a $\omega = \omega_n$, sendo n um inteiro e

$$\omega_n := n \frac{\pi c}{\ell} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (7.62)$$

Então, (7.59) deve ser da forma

$$X_n(x) = D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (7.63)$$

e (7.60), da forma

$$\Theta_n(t) = D_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + D'_n \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{\ell} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (7.64)$$

Portanto, as soluções (7.55) da equação da onda são dadas por

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{\ell} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (7.65)$$

onde A_n e B_n ($n \in \mathbb{Z}$) são constantes arbitrárias. Para obter a superposição mais geral das soluções (7.65) não é necessário usar todo n de \mathbb{Z} , como é fácil de perceber se levarmos em conta que $\operatorname{sen}[(-n\pi)x/\ell] = -\operatorname{sen}(n\pi x/\ell)$, $\cos[(-n\pi)x/\ell] = \cos(n\pi x/\ell)$ e que, para $n = 0$, a solução (7.65) é trivial. De fato, todas as soluções (7.65) são superposições das soluções $\operatorname{sen}(n\pi x/\ell)\cos(n\pi ct/\ell)$ e $\operatorname{sen}(n\pi x/\ell)\operatorname{sen}(n\pi ct/\ell)$ com n positivo.

Além disso, o conjunto formado por essas últimas é linearmente independente. Portanto, dentre as soluções (7.65), basta reter

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{\ell} \quad (n \in \mathbb{N}^*). \quad (7.66)$$

onde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. Notemos que, no caso em que $\omega = 0$, além da solução trivial em (7.63), também temos a solução $X(x) = C''x + C'''$ (C'' e C''' constantes), obtida diretamente da equação (7.57) com $\omega = 0$; entretanto, essa solução também se reduz à trivial no caso das condições de contorno (7.32).

As soluções (7.66) são chamadas **modos normais** da corda vibrante. Em um modo normal todas as partes da corda oscilam com a mesma frequência. As frequências ω_n ($n \in \mathbb{N}^*$) são chamadas **frequências normais** de vibração da corda. Elas são determinadas pelo comprimento da corda e pela velocidade de propagação das ondas progressivas, de acordo com (7.62). As frequências normais são todas múltiplos da mais baixa, $\omega_1 = \pi c/\ell$. O significado físico dos valores discretos das frequências normais pode ser intuitivamente apreciado se considerarmos os comprimentos de onda $\lambda_n := 2\pi c/\omega_n$ das partes espaciais da solução (7.66),

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*). \quad (7.67)$$

Essa fórmula mostra que a corda só acomoda um dado comprimento de onda se o comprimento da corda for um múltiplo do semi-comprimento de onda.

Uma solução da forma (7.66) pode satisfazer somente um tipo particularíssimo de condição inicial, dada por

$$u_0(x) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}, \quad v_0(x) = B_n \frac{n\pi c}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (7.68)$$

Para satisfazer condições iniciais mais gerais usamos o princípio da superposição para construir soluções dadas pela superposição de todas as soluções da forma (7.66), a saber, soluções da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{\ell} \right), \quad (7.69)$$

onde as constantes arbitrárias A_n e B_n ($n \in \mathbb{N}^*$) devem ser ajustadas para satisfazer à condição inicial desejada. O membro direito da equação (7.69) é uma série de Fourier e as questões sobre soluções da forma (7.69) são tratadas em Análise Harmônica.

A solução (7.69) satisfaz à condição inicial (7.33) se

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \quad \text{e} \quad v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (7.70)$$

Um teorema fundamental da teoria das séries de Fourier afirma que, se u_0 e v_0 forem contínuas, com derivadas seccionalmente contínuas, então as séries em (7.70) representam as respectivas funções se tomarmos

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \text{e} \quad B_n = \frac{\ell}{n\pi c} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} dx. \quad (7.71)$$

Supomos que os perfis iniciais de deslocamentos e velocidades da corda satisfazem às condições requeridas. Conseqüentemente, ajustando em (7.69) as constantes de acordo com (7.71), obtemos a solução que satisfaz à condição inicial (7.33). Com isto, fica demonstrada a existência de solução do problema de Cauchy.

Uma vez que (7.69) pode satisfazer qualquer condição inicial desejada, podemos chamá-la de solução geral do problema da corda vibrante com extremos fixos. Obtivemos que essa solução mais geral é a superposição dos modos normais de oscilação da corda.

7.4 Ondas na corda

Na seção anterior, obtivemos funções de onda não-progressivas, que chamamos modos normais, dadas por (7.66). Os modos normais são também chamados **ondas estacionárias**, pois nelas não há um perfil de deslocamentos propagando-se para a direita ou esquerda, o que é fácil perceber observando que na onda estacionária há pontos da corda que permanecem sempre em repouso como, por exemplo, os pontos em $x = \ell/n, 2\ell/n, \dots, (n-1)\ell/n$, no caso do n -ésimo modo de uma corda com as extremidades fixas. Os pontos da corda que permanecem em repouso em uma onda estacionária são chamados **nodos** da onda. No caso de ondas progressivas há potência transmitida ao longo da corda. Na solução de D'Alembert (7.31), as ondas progressivas para a direita e as progressivas para a esquerda transmitem potência para a direita e esquerda, respectivamente. Nas ondas estacionárias não há essa transmissão de potência; a energia fica armazenada em regiões delimitadas da corda, entre os nodos. Notemos, contudo, que as ondas estacionárias podem ser obtidas pela superposição de duas ondas progressivas, como nos garante a solução de D'Alembert (7.31).

Ondas estacionárias em corda com extremos fixos são particularmente importantes, mas há vários outros tipos interessantes de ondas na corda. As soluções de (7.57) e (7.58) foram usadas para construir as soluções estacionárias (7.66). Também podemos tomar como soluções independentes de (7.57) e (7.58) as respectivas funções

$$X(x) = e^{\pm i\frac{\omega}{c}x} \quad \text{e} \quad \Theta(t) = e^{\pm i\omega t}, \quad (7.72)$$

e com elas gerar as soluções (7.59) e (7.60) que dão origem às ondas estacionárias (7.66). Com as soluções (7.72) também podemos formar para a equação da onda as soluções que são funções de $x \pm ct$,

$$e^{i\frac{\omega}{c}(x+ct)}, \quad e^{i\frac{\omega}{c}(x-ct)}, \quad e^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)}, \quad e^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)}, \quad (7.73)$$

e as seguintes soluções reais independentes:

$$\cos\left(\pm\frac{\omega}{c}x - \omega t\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\pm\frac{\omega}{c}x - \omega t\right). \quad (7.74)$$

Cada uma dessas soluções representa uma onda progressiva, para a direita ou esquerda. Funções da forma

$$f_k(x, t) = \cos(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad g_k(x, y) = \sin(kx - \omega t), \quad (7.75)$$

onde k é um real positivo ou negativo e ω é um real positivo, são chamadas **ondas harmônicas**. Elas descrevem perfis harmônicos simples, *i.e.*, dados pelas funções seno ou cosseno, que se propagam no sentido positivo ou negativo do eixo \mathcal{OX} , conforme seja positivo ou negativo o número k , que é chamado **número de onda** (angular). Notemos que as funções harmônicas (7.75) são soluções da equação da onda (7.23) se, e somente se

$$\omega = c|k|. \quad (7.76)$$

A propagação do perfil de uma onda harmônica se processa com velocidade ω/k . As ondas harmônicas são espacialmente periódicas e seu período espacial é chamado **comprimento de onda**; denotando-o por λ , temos

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|}. \quad (7.77)$$

As ondas harmônicas também são periódicas no tempo e seu período temporal é chamado simplesmente **período** da onda; denotando-o por T , temos

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (7.78)$$

A própria constante ω é chamada **freqüência angular**.

Agora, consideremos um sistema físico que tenha movimentos descritos pelas funções harmônicas (7.75), nas quais a freqüência ω seja dada pelo número de onda k por meio de uma função arbitrária, que escrevemos como

$$\omega = \omega(k). \quad (7.79)$$

Tais movimentos satisfazem uma equação de onda (7.23) na qual a velocidade de propagação, dada por

$$c = \frac{\omega(k)}{|k|}, \quad (7.80)$$

de acordo com (7.76), depende do número de onda da onda plana em consideração. Tais movimentos também são denominados ondulatórios e a relação (7.79) que existe neles, entre freqüência e número de onda, é chamada **relação de dispersão** do sistema. Se a relação de dispersão não é do tipo $\omega \propto k$, ondas harmônicas com diferentes comprimentos de onda propagam-se com diferentes velocidades. Tal diferença faz com que essas ondas acabem por se dispersarem a partir de um instante em que estejam juntas. Se tais ondas estiverem superpostas formando um certo perfil, esse perfil irá se deformando com o tempo em conseqüência da dispersão. Somente no caso $\omega \propto k$ não ocorre a dispersão de ondas com diferentes comprimentos de onda, de modo que perfis resultantes de superposições dessas ondas harmônicas propagam-se sem deformação. Nesse caso, a constante de proporcionalidade entre ω e k é a velocidade de propagação comum a todas as ondas harmônicas com diferentes comprimentos de onda. Esse é o caso da corda vibrante, para a qual a relação de dispersão é $\omega = \sqrt{\tau/\sigma}|k|$, *i.e.*, de proporcionalidade entre freqüência e número de onda. Ondas na corda vibrante propagam-se sem dispersão, como é evidente na solução de D'Alembert (7.31). Um sistema físico menos idealizado pode ter relações de dispersão mais complicadas; uma

corda de piano, por exemplo, tem relação de dispersão dada, aproximadamente, por $\omega^2 = c^2k^2 + \alpha k^4$, onde α é uma constante relacionada com a rigidez da corda.

Qualquer valor fixo da fase $kx - \omega t$ das funções harmônicas (7.75) define a velocidade com que propaga o ponto da onda que tem essa fase. De fato, dado um valor constante φ para a fase, $kx - \omega t = \varphi$, obtemos $k(dx/dt) - \omega = 0$, *i.e.*, $(dx/dt) = \omega/k$. Chamamos $|dx/dt|$, *i.e.*, $\omega/|k|$ **velocidade de fase** das ondas harmônicas (7.75). Obviamente, a velocidade de fase dessas ondas é idêntica à velocidade de propagação.

As ondas harmônicas (7.75) na corda vibrante propagam-se indefinidamente para a direita ou a esquerda, com velocidade $c = \omega/k$. Se houver condições de contorno, essas ondas harmônicas podem não obedecê-las, mas superposições delas podem dar origem a soluções que as obedecem. No caso da corda de extremos fixos, por exemplo, os modos normais (7.66) podem ser escritos como a seguinte superposição das ondas harmônicas (7.75),

$$u_n(x, t) = \frac{A_n}{2} \left[\text{sen}(k_n x - \omega_n t) - \text{sen}(-k_n x - \omega_n t) \right] + \frac{B_n}{2} \left[\text{cos}(k_n x - \omega_n t) - \text{cos}(-k_n x - \omega_n t) \right], \quad (7.81)$$

nas quais $\pm k_n$ e ω_n não somente satisfazem (7.76), como também estão restritos aos valores discretos dados por $k_n = n\pi/\ell$ e $\omega_n = n\pi c/\ell$ ($n \in \mathbb{N}$).

Passemos ao caso idealizado de uma corda infinita, que podemos considerar sem condições de contorno. As ondas nessa corda também são dadas pela solução genérica de D'Alembert (7.31), à qual desejamos, agora, incorporar a condição inicial (7.33). Impondo tal condição à dita solução, obtemos

$$f(x) + g(x) = u_0(x) \quad \text{e} \quad -cf'(x) + cg'(x) = v_0(x), \quad (7.82)$$

que nos leva à solução

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[u_0(x - ct) + u_0(x + ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(x') dx'. \quad (7.83)$$

De acordo com essa expressão, a onda em x no instante t é determinada a partir apenas da condição inicial no intervalo $[x - ct; x + ct]$ do eixo \mathcal{OX} . Examinemos como, em geral, os valores da onda em pontos do espaço-tempo influenciam e são influenciados por valores da onda em outros pontos do espaço-tempo. Sejam no plano espaço-temporal dos pares $(x, t) \in \mathbb{R}^{1+1}$ duas retas pendentes do ponto genérico (x, t) , com inclinações $\pm 1/c$, conforme mostra a figura 7.6. As duas retas dividem o plano em três regiões marcadas na figura como *I*, *II* e *III*. A região *I* é chamada cone retardado ou **cone passado** do ponto (x, t) ; ele contém os pontos nos quais os valores da onda influenciarão o valor da onda em (x, t) . Ele intercepta o eixo $t = 0$ no intervalo $[x - ct; x + ct]$. A região *II* é chamada de cone avançado ou **cone futuro** do ponto (x, t) ; ele contém os pontos nos quais os valores da onda serão influenciados pelo valor da onda em (x, t) . A região restante, marcada como *III*, contém os pontos nos quais os valores da onda não têm relação de influência com o valor da onda em (x, t) .

Figura 7.6: Cone passado (I) e cone futuro (II) do ponto (x, t) .

Observemos, finalmente, que a expressão (7.83) pode ser adaptada às situações em que a corda está sob condições de contorno, como nos casos de um dos extremos fixos ou ambos os extremos fixos.

7.5 Oscilações transversais numa rede unidimensional

Voltemos a considerar uma distribuição discreta de matéria, a saber, um sistema físico constituído por N partículas, cujas posições de equilíbrio estão em uma dada reta, com a mesma separação h entre as posições de partículas vizinhas. Esse é um sistema de interesse por si só e é útil também no estudo da corda vibrante. Esse sistema de partículas é um exemplo do que chamamos **rede** ou **reticulado** unidimensional. Vamos supor que os deslocamentos das partículas sejam transversais à rede e que ocorram todos em um mesmo plano. Escolhemos o eixo \mathcal{OX} ao longo das posições de equilíbrio e o eixo \mathcal{OY} no plano dos deslocamentos.

Diversos sistemas físicos podem ser descritos como uma rede unidimensional. Vamos considerar um sistema de partículas presas a uma corda elástica cuja massa é desprezível diante da massa m de cada partícula. A corda tem comprimento ℓ e tensão τ na configuração de equilíbrio. Tomemos suas extremidades fixas em $x = 0$ e $x = \ell$. As partículas têm posições de equilíbrio em $x_j = jh$ ($j = 1, 2, \dots, N$) e seus deslocamentos transversos são respectivamente representados por $u_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Por conveniência de notação, escrevemos para as extremidades da corda $x_0 = 0$ e $x_{N+1} = (N+1)h$. Conseqüentemente, $u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0$. Vamos supor que todas as oscilações transversais sejam de pequena amplitude e que a tensão τ da corda seja a mesma em toda a sua extensão e permaneça inalterada durante o movimento. Uma

Figura 7.7: Corda elástica tensa carregada de contas com massas iguais a m .

vez que a massa da corda é desprezível, ela tem em qualquer instante a forma de uma poligonal com vértices nas partículas. No modelo que estamos discutindo, a corda apenas exerce a função de proporcionar um meio de interação entre as partículas e implementar a condição de contorno.

A Segunda Lei de Newton nos fornece as seguintes equações de movimento para esse sistema de partículas:

$$m \frac{d^2 u_j(t)}{dt^2} = \tau \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} - \tau \frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h} \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (7.84)$$

ou seja,

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} + \frac{2\tau}{h} u_j - \frac{\tau}{h} (u_{j+1} - u_{j-1}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (7.85)$$

Na tentativa de obter modos normais para esse sistema, experimentaremos uma solução da forma

$$u_j(t) = a_j e^{\pm i\omega t} \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (7.86)$$

que reduz a equação diferencial (7.85) à equação de diferença

$$\left(\frac{2\tau}{h} - m\omega^2 \right) a_j - \frac{\tau}{h} (a_{j+1} + a_{j-1}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (7.87)$$

Essa é uma relação de recorrência que, em princípio, permite determinar a_j ($j = 1, 2, \dots, N$) em função de a_0 e a_{N+1} (que no presente caso são iguais a zero). No entanto, a forma da equação de diferença (7.87) na variável (índice) j , juntamente com nossa experiência prévia com modos normais, sugerem que busquemos soluções de (7.87) da forma

$$a_j = A e^{\pm ipj}, \quad (7.88)$$

onde A e p são constantes independentes de j . Substituindo (7.88) em (7.87), obtemos

$$\cos p = 1 - \frac{mh}{2\tau} \omega^2. \quad (7.89)$$

O membro direito dessa equação é menor do que 1. Além disso é maior do que -1 se ω for menor do que

$$\omega_c := \sqrt{\frac{4\tau}{mh}}. \quad (7.90)$$

Se $\omega > \omega_c$ então $\cos p < -1$ e p não é um número real, sendo dado por

$$p = \pi \pm i \operatorname{arccosh} \left[2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - 1 \right]. \quad (7.91)$$

Tal valor de p , quando substituído em (7.88), leva a uma solução em (7.86) que não pode satisfazer à condição de contorno de que ambas as extremidades da corda estão fixadas no eixo \mathcal{OX} . Concluimos, portanto, que

$$\omega \leq \omega_c \quad (7.92)$$

e que p é real; além disso, como p aparece somente na função exponencial em (7.88), podemos restringi-lo apenas ao intervalo $(\pi, \pi]$. Finalmente, o duplo sinal no expoente de (7.88) nos dispensa de considerar valores negativos de p , de modo que consideraremos apenas os valores de p tais que

$$0 \leq p \leq \pi. \quad (7.93)$$

Temos, finalmente, que as soluções reais construídas a partir de (7.86) e (7.88) são produtos de senos e cossenos com argumentos pj e ωt . A solução mais geral de (7.85) será, então,

$$u_j(t) = A \sin pj \cos \omega t + B \sin pj \sin \omega t + C \cos pj \cos \omega t + D \cos pj \sin \omega t. \quad (7.94)$$

Para satisfazer à condição de contorno de extremidades fixas,

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0, \quad (7.95)$$

devemos ter $C = D = 0$ e $\sin [p(N+1)] = 0$, *i.e.*, $p = n\pi/(N+1)$ ($n \in \mathbb{Z}$), com a restrição (7.93). Notemos que, embora os casos $n = 0$ e $n = N+1$ não sejam excluídos pela condição (7.93), eles obedecem à condição de contorno da corda com extremos fixos no eixo \mathcal{OX} somente se forem as soluções triviais. Os valores restantes de p ,

$$p = p_n := \frac{n\pi}{N+1} \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (7.96)$$

levam às soluções linearmente independentes da forma (7.94). Substituindo os valores permitidos (7.96) de p em (7.89), obtemos os valores permitidos para a frequência,

$$\omega_n = \omega_c \sin \frac{p_n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (7.97)$$

Essas são as frequências normais de vibração da rede. Finalmente, substituindo em (7.94) todos esses resultados provenientes da condição de contorno (7.95), obtemos os modos normais de vibração da rede,

$$u_{jn}(t) = \sin(p_n j) \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right] \quad (j = 1, 2, \dots, N; n = 1, 2, \dots, N). \quad (7.98)$$

Notemos que o número de modos normais é exatamente igual ao número de partículas na rede.

É interessante comparar os modos normais (7.98) da rede com os modos normais (7.66) da corda contínua, que escrevemos na forma

$$u_n(x, t) = \text{sen}(k_n x) \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t) \right] \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.99)$$

onde $k_n = n\pi/\ell$ e $\omega_n = ck_n$ ($n = 1, 2, \dots$), ao passo que em (7.98) $p_n = nh\pi/\ell$ e $\omega_n = \omega_c \text{sen}(p_n/2)$ ($n = 1, 2, \dots, N$), conforme estabelecido pelas equações (7.96) e (7.97). Para explorar a comparação entre os dois sistemas, o contínuo e o discreto, imaginemos uma corda fictícia, com deslocamento $\tilde{u}(x, t)$, que coincida com o do sistema discreto quando $x = x_j$ ($j = 0, 1, \dots, N, N + 1$),

$$\tilde{u}(x_j, t) = u_j(t) \quad (j = 0, 1, \dots, N, N + 1). \quad (7.100)$$

Definimos também a variável $k = p/h$, associada à variável p definida na solução (7.88). Tendo em vista (7.98), impomos à corda fictícia as seguintes possibilidades de movimento:

$$\tilde{u}_n(x, t) = \text{sen}(k_n x) \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t) \right] \quad (x \in [0; \ell]; \quad n = 1, 2, \dots, N), \quad (7.101)$$

onde

$$k_n = n\pi/\ell, \quad \omega_n = \omega_c \text{sen}(hk_n/2). \quad (7.102)$$

Obviamente, para $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) essas equações descrevem os movimentos (7.98) do sistema de partículas, conforme ilustrado na figura 7.8

Figura 7.8: A corda fictícia, em tracejado, coincide com as partículas em x_j .

Os modos normais da corda fictícia, descrita em (7.101), têm comprimentos de onda dados por $\lambda_n = 2\pi/k_n$, *i.e.*,

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} = 2h \frac{N + 1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (7.103)$$

Ao contrário da corda real, estudada anteriormente e dotada de relação de dispersão $\omega = c|k|$, essa corda fictícia tem relação de dispersão dada por

$$\omega = \omega_c \text{sen}(h|k|/2) . \quad (7.104)$$

Além disso, a corda ideal com extremos fixos e $\omega = c|k|$ possui uma infinidade de modos com freqüências tão altas quanto se queira, ($\omega_n = n\pi c/\ell$; $n \in \mathbb{N}^*$), ao passo que a fictícia suporta apenas os N modos dados por $\omega_n = \omega_c \text{sen}(nh\pi/2\ell)$ ($n = 1, 2, \dots, N$), conforme ilustrado na figura 7.9 para o caso $N = 8$.

Figura 7.9: Relação de dispersão $\omega = c|k|$ em traço contínuo; relação de dispersão da corda fictícia em tracejado. Modos normais da corda vibrante representados por \circ e modos normais da rede, por \bullet .

Observemos que a cota superior ω_c das freqüências (quando $p = \pi$, $n = N + 1$) corresponde a uma cota inferior $\lambda_c = 2h$ para os comprimentos de onda na rede (ou se preferirmos, na corda fictícia associada à rede). Esse resultado é intuitivo, pois partículas separadas de h não podem definir um comprimento de onda menor do que $2h$.

Esperamos que, quanto menor seja o espaçamento entre as partículas de uma rede, melhor ela simule uma corda contínua. De fato, é possível verificar que o formalismo desenvolvido para a rede reduz-se ao formalismo da corda contínua se tomarmos o chamado **limite do contínuo**. Esse é definido pelos limites: $N \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ com $(N + 1)h = \ell = \text{constante}$ e $m \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ com $(m/h) = \sigma = \text{constante}$. Nesse limite o sistema de equações de movimento (7.84) reduz-se à equação da onda (7.23), $\omega_c \rightarrow \infty$, (7.104) transforma-se em (7.76) e os modos normais (7.98) da rede tornam-se os modos normais (7.66) da corda vibrante.

Capítulo 8

Fluidos

8.1 Introdução

Anteriormente, definimos uma distribuição contínua de matéria em uma região \mathcal{M} como um sistema físico cuja configuração é dada por uma função que associa, a cada ponto da região, o valor da densidade de massa do sistema no ponto. A densidade, assim definida, descreve uma distribuição de matéria em repouso ou uma distribuição de matéria em um único instante bem determinado. Agora, desejamos considerar a possibilidade do sistema físico estar em movimento. Nesse caso, a densidade de massa em cada ponto pode mudar com o tempo e, desse modo, deve ser uma função do instante do tempo em consideração, além de ser uma função do ponto em questão. Apresentamos, pois, a definição genérica de **distribuição contínua de matéria** em uma região \mathcal{M} , durante um intervalo de tempo I , como sendo uma função contínua

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M} \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: (P, t) \longmapsto \rho(P, t) , \end{aligned} \tag{8.1}$$

na qual $\rho(P, t)$ é a densidade de massa no ponto P no instante t . Conseqüentemente, a massa contida em uma região $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$, no instante t , é dada por

$$m(\mathcal{R}, t) = \int_{\mathcal{R}} \rho(P, t) dV , \tag{8.2}$$

quantidade essa que pode mudar com o tempo. Em uma região infinitesimal $\delta\mathcal{R}$ temos, em virtude da continuidade da distribuição,

$$m(\delta\mathcal{R}, t) = \rho(P, t)\text{vol}(\delta\mathcal{R}) , \tag{8.3}$$

onde P é um ponto arbitrário em $\delta\mathcal{R}$. Tomando o limite em que $\delta\mathcal{R}$ se contrai no ponto P , obtemos

$$\lim_{\delta\mathcal{R} \rightarrow P} m(\delta\mathcal{R}, t) = 0 . \tag{8.4}$$

É claro pois que, em uma distribuição contínua, uma partícula do sistema não pode

Figura 8.1: Região \mathcal{R} e região infinitesimal $\delta\mathcal{R}$ em torno de um ponto P , contidas na região \mathcal{M} da distribuição de matéria.

ser identificada com um ponto material; devemos considerá-la como um subsistema que ocupa uma região infinitesimal, *i.e.*, elementar. Assim, entendemos por partícula em P uma porção do sistema que ocupa uma vizinhança infinitesimal do ponto P . Uma tal partícula é também denominada **elemento do sistema** em P .

Para estudar as forças que agem em uma distribuição contínua (8.1), fixemos um instante do tempo e consideremos o subsistema contido em uma região \mathcal{R} da distribuição, *i.e.*, uma região \mathcal{R} contida em \mathcal{M} . As forças que agem no subsistema ou são de **contato**, ou são de **longo alcance**. As forças de contato são as exercidas sobre a fronteira da região \mathcal{R} , a superfície $\partial\mathcal{R}$, pela matéria da distribuição fora da região \mathcal{R} e em contato com sua fronteira $\partial\mathcal{R}$. As forças de longo alcance são exercidas nos pontos interiores da região \mathcal{R} , por corpos que não precisam estar em contato com \mathcal{R} . Seja $d\mathbf{F}_c$ a força de contato que age em um elemento de superfície de $\partial\mathcal{R}$ de área dA e seja $d\mathbf{F}_a$ a força de alcance longo que age em uma subregião elementar de \mathcal{R} , de volume dV .

Estamos interessados apenas em certos tipos de forças de contato e de longo alcance, quais sejam, as forças de contato $d\mathbf{F}_c$ que são proporcionais à área dA da superfície elementar sobre a qual agem, e as forças de longo alcance $d\mathbf{F}_a$ que são proporcionais ao volume dV da subregião elementar sobre a qual agem. As primeiras são chamadas **forças superficiais** e as segundas, **forças volumares**. Para uma força volumar definimos **densidade volumar de força**, em cada ponto no interior da região \mathcal{R} , como sendo a força volumar por unidade de volume que age em uma subregião elementar em torno do ponto. Denotando por \mathbf{f} a densidade volumar de força, temos

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}_a}{dV} . \quad (8.5)$$

Para a força superficial definimos **densidade superficial de força**, em cada ponto da fronteira $\partial\mathcal{R}$ da região, como sendo a força superficial por unidade de área que age em uma superfície elementar da fronteira em torno do ponto. Denotando por $\boldsymbol{\tau}$

Figura 8.2: Força infinitesimal de contato $d\mathbf{F}_c$ e, de alcance longo $d\mathbf{F}_a$.

a densidade superficial de força, temos

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{F}_c}{dA}. \quad (8.6)$$

Essa densidade superficial de força é também chamada **tensão** sobre o ponto da fronteira em consideração.

De acordo com nossa convenção, a normal \mathbf{n} em cada ponto da superfície $\partial\mathcal{R}$, que é a fronteira de uma região \mathcal{R} , aponta para fora da região. A componente da tensão ao longo da normal à superfície é chamada **tensão normal** τ_n e a componente da tensão tangencial à superfície, **tensão de cisalhamento**, ou de corte. A tensão normal que tem o sentido da normal é chamada **tração** e a que tem o sentido oposto, **pressão**. Intuitivamente, temos que a tensão superficial $\boldsymbol{\tau}$ tende a expandir, comprimir ou laminar o subsistema, conforme tenhamos, respectivamente, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} > 0$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} < 0$ ou $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$. As reações a essas tensões são exercidas pelo subsistema sobre as partículas exteriores em contato com sua fronteira e são dadas, naturalmente, pela Terceira Lei de Newton.

Uma distribuição contínua de matéria é denominada um sólido ou um fluido conforme o modo como suas partes reagem às tensões de cisalhamento. Um **sólido** deforma-se até equilibrar as tensões de cisalhamento; essa é a definição de um sólido ideal pois, na prática, um sólido pode romper-se sob tensões extremas, *i.e.*, deixar de ser sólido. Um **fluido** é uma distribuição contínua de matéria incapaz de atingir o equilíbrio na presença de qualquer tensão de cisalhamento. Conseqüentemente, não há tensões de cisalhamento em um fluido em equilíbrio. O movimento característico de um fluido é chamado **escoamento**. A propriedade de um fluido pela qual ele exerce tensões de cisalhamento e trações é chamada **viscosidade**; dizemos que ele é tanto mais viscoso quanto maior a sua capacidade de exercer essas tensões e trações. Nos problemas que iremos considerar, as trações entre as partes de um fluido serão praticamente desprezíveis. Portanto, iremos supor que a tensão normal em um fluido seja exclusivamente de pressão. Por isso, escreveremos a tensão normal sobre uma

superfície em um ponto P do fluido, no instante t , como

$$\boldsymbol{\tau}_n(P, t) = -p(P, t; \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (8.7)$$

onde \mathbf{n} é a normal à superfície em P e $p(P, t; \mathbf{n})$, naturalmente, é o módulo da pressão $\boldsymbol{\tau}_n(P, t)$. Em geral, não há perigo de confundir o módulo do vetor pressão com o próprio vetor, de modo que $p(P, t; \mathbf{n})$ é denominada **pressão no ponto P , no instante t e na direção de \mathbf{n}** . Notemos que $p(P, t; \mathbf{n})$ é o módulo de um vetor que tem a direção de \mathbf{n} , porém sentido oposto. Finalmente, usando a definição (8.6) do vetor tensão $\boldsymbol{\tau}$ e a equação (8.7) de pressão, podemos escrever

$$p(P, t; \mathbf{n}) = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot d\mathbf{F}_c}{dA} \right|, \quad (8.8)$$

i.e., a pressão definida em (8.7) é o módulo da componente normal da força superficial de contato por unidade de área.

8.2 Estática dos fluidos

Em um fluido que permanece em repouso não pode haver tensões de cisalhamento. Desse modo, as tensões que restam são sempre normais aos elementos de superfície em consideração e, juntamente com as forças de longo alcance, devem se equilibrar. Para obter as equações fundamentais de um fluido em repouso vamos aplicar a Segunda Lei de Newton a um elemento do fluido. Consideremos que o elemento de fluido em equilíbrio esteja em uma região infinitesimal cilíndrica, com uma base perpendicular ao eixo do cilindro em um ponto P e a outra fazendo com o eixo um ângulo θ e interceptando-o em um ponto P' ; o ângulo θ deve ser menor do que noventa graus e, por conveniência, vamos imaginá-lo pequeno, digamos menor do que um ângulo θ_0 em torno de uns vinte graus. Os unitários normais às bases em P e P' , apontando para fora da região cilíndrica, serão denotados por \mathbf{n} e \mathbf{n}' , respectivamente. É claro que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = -\cos \theta$. Sejam dA e dA' as respectivas áreas das bases em P e P' , e ε a altura central do cilindro, *i.e.*, a distância de P a P' . Definindo um unitário $\hat{\mathbf{s}}$ na direção da reta por P e P' e no sentido de P para P' , podemos escrever $\overrightarrow{PP'} = \varepsilon \hat{\mathbf{s}}$, $\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{s}}$ e $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}' dA' = dA$. O fato do cilindro ser infinitesimal se traduz em dA e ε serem infinitesimais e, como conseqüência, podemos dizer que seu volume é $dV = \varepsilon dA$. A figura 8.3 ilustra o cilindro infinitesimal e as grandezas associadas a ele.

Por hipótese, o elemento de fluido no cilindro está em repouso e, portanto, pela Segunda Lei de Newton, a soma das forças sobre ele é nula. Tais forças são a força volumar no interior do cilindro, as forças superficiais de pressão nas suas bases e as forças superficiais de pressão na sua superfície lateral. As forças de pressão entre as partes do fluido em repouso não dependem do tempo e a força volumar total sobre cada elemento também não pode depender do tempo na hipótese de o fluido estar em equilíbrio. As forças de pressão nas laterais são perpendiculares a $\hat{\mathbf{s}}$, devido ao formato cilíndrico do elemento. Desse modo, pela Segunda Lei de Newton, podemos escrever para a soma das projeções das forças ao longo de $\hat{\mathbf{s}}$,

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \left[\boldsymbol{\tau}_n(P') dA' + \boldsymbol{\tau}_n(P) dA + \mathbf{f}(P + \hat{\mathbf{s}}\varepsilon/2) dV \right] = \mathbf{0}, \quad (8.9)$$

Figura 8.3: Porção de fluido num cilindro elementar.

onde $P' = P + \hat{\mathbf{s}}\varepsilon$ e $dV = dA\varepsilon$. Usando (8.7) para expressar (8.9) em termos de pressões, obtemos

$$p(P + \hat{\mathbf{s}}\varepsilon, \mathbf{n}') \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}' dA' + p(P, \mathbf{n}) \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n} dA = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{f}(P + \hat{\mathbf{s}}\varepsilon/2) dA\varepsilon . \quad (8.10)$$

Mas $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}' dA' = dA$ e $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n} = -1$; logo

$$p(P + \hat{\mathbf{s}}\varepsilon, \mathbf{n}') - p(P, \mathbf{n}) = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{f}(P + \hat{\mathbf{s}}\varepsilon/2) \varepsilon . \quad (8.11)$$

Agora, tomamos o limite em que o cilindro elementar se contrai em um ponto; então, $\varepsilon \rightarrow 0$ em (8.11) e concluímos que

$$p(P, \mathbf{n}') = p(P, \mathbf{n}) . \quad (8.12)$$

Uma vez que supusemos que o ângulo entre $-\mathbf{n}$ e \mathbf{n}' está entre zero e um ângulo θ_0 (menor do que noventa graus), podemos considerar que \mathbf{n}' pode ter qualquer direção dentro de um cone de vértice em P e ângulo de abertura $2\theta_0$; o cone tem o eixo na direção de \mathbf{n} e se estende no sentido oposto a \mathbf{n} . Portanto, a equação (8.12) nos permite concluir que o valor da pressão em P , na direção de qualquer \mathbf{n}' dentro do cone, é igual à pressão em P na direção de \mathbf{n} . Dessa propriedade é muito simples concluir que “a pressão em qualquer ponto de um fluido em equilíbrio não depende da direção em que é considerada”, *i.e.*, a equação (8.12) é válida para quaisquer \mathbf{n} e \mathbf{n}' . Podemos, portanto, definir a pressão em um fluido em equilíbrio como uma quantidade que depende apenas do ponto do fluido em consideração, *i.e.*, como um campo escalar

$$\begin{aligned} p : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : P &\longmapsto p(P) . \end{aligned} \quad (8.13)$$

A equação (8.11) pode, então, ser escrita na forma

$$p(P + \hat{\mathbf{s}}\varepsilon) - p(P) = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{f}(P + \hat{\mathbf{s}}\varepsilon/2) \varepsilon . \quad (8.14)$$

Dividindo essa equação por ε e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\partial p(P)}{\partial s} = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{f}(P), \quad (8.15)$$

o que nos permite escrever, em virtude das propriedades do gradiente,

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla p(P) = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{f}(P). \quad (8.16)$$

Uma vez que $\hat{\mathbf{s}}$ e P são arbitrários, essa equação implica

$$\nabla p = \mathbf{f}. \quad (8.17)$$

Essa é, precisamente, a chamada **equação fundamental da estática dos fluidos**. Seu significado é intuitivo, o gradiente da pressão equilibra a densidade de força volumar. Integrando essa equação em uma região finita \mathcal{R} do fluido, obtemos

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla p \, dV = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{f} \, dV, \quad (8.18)$$

que é a condição de equilíbrio da porção do fluido na região \mathcal{R} .

Usando-se o teorema de Gauss da divergência, demonstra-se a identidade

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \Phi \, dV = \oint_{\partial \mathcal{R}} \Phi \mathbf{n} \, dA, \quad (8.19)$$

na qual Φ é um campo escalar. Usando esse resultado em (8.18), obtemos

$$\oint_{\partial \mathcal{R}} p \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{f} \, dV. \quad (8.20)$$

Nessa forma, a equação fundamental da estática dos fluidos torna-se ainda mais intuitiva. Ela afirma que a resultante das forças de pressão sobre a superfície de uma porção do fluido equilibra a resultante das forças de longo alcance que atuam no interior dessa porção. Consideremos o caso em que a força volumar se resume ao peso e há um corpo imerso no fluido. A resultante das forças de pressão sobre o corpo é chamada **empuxo** sobre ele. A porção do fluido que ocuparia a região imersa do corpo é chamada **fluido deslocado** pelo corpo. O **Princípio de Arquimedes** afirma que o empuxo sobre um corpo imerso em um fluido tem mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao peso do fluido deslocado e está aplicado no centro de gravidade do mesmo. Se postularmos que na interface entre uma porção e o restante do fluido em equilíbrio a pressão não muda se a porção for substituída por qualquer corpo com a mesma forma, obtemos o princípio de Arquimedes como consequência do resultado (8.20).

Um fluido em equilíbrio tem uma certa distribuição de pressões (8.13) e uma certa distribuição de matéria dada por uma função densidade

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: P \longmapsto \rho(P). \end{aligned} \quad (8.21)$$

A relação entre pressão e densidade em uma distribuição depende do material de que é constituída a distribuição e de suas propriedades termodinâmicas; a relação é obtida a partir das relações constitutivas e equações de estado do fluido. Consideremos, por exemplo, um fluido que obedeça à **Lei de Hooke**, que afirma ser a variação de pressão proporcional à variação relativa de volume,

$$dp = -B \frac{dV}{V}, \quad (8.22)$$

onde B é o **módulo volumétrico** do material em consideração. Dessa lei, obtemos a seguinte relação entre pressão e densidade,

$$dp = B \frac{d\rho}{\rho}, \quad (8.23)$$

onde usamos a igualdade $dV/V = -d\rho/\rho$, uma decorrência da massa ρV do fluido ser constante. Um outro exemplo é dado pela equação de estado de um gás ideal de molécula grama M ,

$$p = \frac{R}{M} T \rho, \quad (8.24)$$

na qual R é a constante universal dos gases e T , a temperatura absoluta do gás. Nessa equação, vemos que a densidade é proporcional à pressão, se a temperatura se mantiver constante.

Uma relação constitutiva particularmente simples é dada pela relação $\rho = \text{constante}$, que caracteriza um fluido homogêneo incompressível. Esse é o caso de muitos líquidos cuja extensão pouco varia em altura; de fato, o peso de uma coluna de líquido que não seja muito alta é incapaz de comprimir o líquido a ponto de alterar sua densidade, de resto uniforme. Para esses líquidos, de densidade constante, a integral de linha de ambos os membros da equação (8.17), de um ponto P_0 a um ponto P , nos dá

$$\int_{P_0}^P \nabla p \cdot d\mathbf{r} = \rho \mathbf{g} \cdot \int_{P_0}^P d\mathbf{r}, \quad (8.25)$$

ou seja,

$$p(P) = p(P_0) + \rho \mathbf{g} \cdot \overrightarrow{P_0 P}. \quad (8.26)$$

Essa relação é conhecida como **Lei de Stevin** e é comumente escrita na forma

$$p(P) = p_0 + \rho g h, \quad (8.27)$$

na qual p_0 é a pressão na superfície livre do fluido (em geral a pressão atmosférica) e h é a altura abaixo dessa superfície em que se encontra o ponto P do fluido.

8.3 Cinemática dos fluidos

Agora, consideremos um fluido em movimento. Sua densidade ρ pode então depender do tempo e tem a forma (8.1). Para dar uma descrição completa do escoamento desse fluido, podemos definir funções que descrevam o movimento de cada um de

seus elementos; seriam análogas às funções-movimento usadas para sistemas de N partículas puntiformes, embora no caso do fluido o número de partículas seja infinito. No caso do sistema de N partículas, elas são identificadas por um índice, digamos k , que varia de 1 a N , e a função-movimento da k -ésima partícula é denotada por $\boldsymbol{\phi}_k$. A posição \mathbf{r}_k dessa partícula em um instante t de um intervalo I é dada por $\boldsymbol{\phi}_k(t)$, *i.e.*, $\mathbf{r}_k = \boldsymbol{\phi}_k(t)$. Para descrever o movimento do sistema de N partículas, poderíamos, também, definir uma função $\boldsymbol{\phi}$ de duas variáveis k e t , por meio de $\boldsymbol{\phi}(k, t) = \boldsymbol{\phi}_k(t)$. Nessa definição três coisas são evidentes. A primeira é que $\boldsymbol{\phi}(k, t)$ é a posição da k -ésima partícula do sistema no instante t . A segunda é que nada foi feito além de considerar o índice que identifica as partículas do sistema como uma variável da função $\boldsymbol{\phi}$. A terceira é que em $\boldsymbol{\phi}(k, t)$ o domínio da variável k é o conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$ e o da variável t , o intervalo de tempo I . Agora, voltemos ao caso de um fluido. Podemos identificar todas as partículas do fluido, *i.e.*, todos as porções infinitesimais em que o consideramos dividido, por meio das respectivas posições em um certo instante fixo, digamos $t = t_0$, e definir para cada partícula assim identificada a função que dá o seu vetor-posição em qualquer instante t do intervalo de tempo I , durante o qual consideramos o movimento do fluido. Mais especificamente, definimos $\mathbf{u}(P, t)$ como sendo o vetor-posição no instante t , do elemento do fluido que no instante $t = 0$ se encontra no ponto P , ou seja, \mathbf{u} é a função que dá a posição de cada partícula do fluido em um instante qualquer do intervalo de tempo I . A função \mathbf{u} depende de duas variáveis P e t , sendo o domínio de P a região \mathcal{M} onde se encontra o fluido, e o domínio de t o intervalo de tempo I do escoamento. Na verdade, devemos dizer que \mathbf{u} é a função-movimento do fluido, do mesmo modo que dizemos que $\boldsymbol{\phi}$ é a função-movimento do sistema de N partículas. A função $\mathbf{u}(P, t)$ dá o vetor-posição no instante t da partícula identificada pela variável P , do mesmo modo que $\boldsymbol{\phi}(k, t)$ dá a posição no instante t da partícula identificada pela variável k . As duas funções diferem apenas no fato de que a variável k é discreta com valores em $\{1, 2, \dots, N\}$ e a variável P é contínua com valores em \mathcal{M} . Em suma, o movimento do fluido pode ser descrito pela função

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \mathcal{M} \times I &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ : (P, t) &\longmapsto \mathbf{u}(P, t) . \end{aligned} \quad (8.28)$$

Como de costume, podemos escrever $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ no lugar de $\mathbf{u}(P, t)$, se denotarmos por \mathbf{r} o vetor-posição do ponto P .

Durante todo o escoamento do fluido, ou seja, em qualquer instante t do movimento, a variável $\mathbf{u}(P, t)$ é o vetor-posição de um mesmo elemento do fluido (aquele que no instante t_0 tem posição \mathbf{r}). Variáveis como essa, que são propriedades de um mesmo elemento do fluido durante todo o movimento, são chamadas **variáveis lagrangianas** ou **variáveis de Lagrange**. Dizemos que a variáveis lagrangianas “seguem o movimento de cada elemento do fluido”.

Para muitos propósitos, é mais simples e conveniente usar variáveis que descrevem propriedades do fluido em um ponto fixo do espaço; essas variáveis são chamadas **variáveis eulerianas** ou **variáveis de Euler**. Nesse caso, em diferentes instantes a variável descreve a mesma propriedade para, em geral, diferentes partículas do fluido. De fato, no ponto fixo em que ela descreve a propriedade, em um instante se encontra

Figura 8.4: A variável lagrangiana $\mathbf{u}(P, t)$ descreve em qualquer instante t uma propriedade de uma mesma partícula do fluido, no caso, descreve a posição da partícula que se encontra em \mathbf{r} no instante t_0 .

uma partícula e, em outro instante, se encontra, geralmente, outra. Um exemplo de variável euleriana é dado pela densidade (8.1). No instante t , $\rho(P, t)$ dá a densidade do elemento de fluido que passa por P neste instante. Em um instante posterior t' esse elemento está adiante em sua trajetória e $\rho(P, t')$ dá a densidade de um outro elemento do fluido, que passa por P no instante t' . De um modo geral, uma variável Euleriana é um campo dependente do tempo

É importante notar que as leis da mecânica aplicam-se às partículas do sistema e não aos pontos do espaço por onde elas passam. Desse modo, a aplicação dessas leis aos fluidos é imediata se usarmos variáveis lagrangianas, que descrevem propriedades das partículas do fluido, mas exigem um certo trabalho se usarmos variáveis eulerianas, que descrevem propriedades do fluido em pontos fixos do espaço. Se desejamos usar variáveis eulerianas, devemos encontrar relações que descrevam por meio delas as propriedades de um elemento de fluido em movimento, pelo menos durante um intervalo de tempo infinitesimal. Já que estaremos usando essas variáveis em nosso estudo, o estabelecimento dessas relações é o trabalho a que nos dedicaremos inicialmente.

Seja a variável euleriana

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathcal{M} \times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: (P, t) \longmapsto \Phi(P, t), \end{aligned} \quad (8.29)$$

que pode representar um campo escalar ou uma componente de algum campo vetorial ou tensorial. Seja um deslocamento arbitrário $d\mathbf{r}$, a partir do ponto P , e um intervalo de tempo arbitrário dt , a partir do instante t . O diferencial de Φ que corresponde a essas variações de \mathbf{r} e t é dado por

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + d\mathbf{r} \cdot \nabla \Phi. \quad (8.30)$$

Agora, seja dt um intervalo de tempo infinitesimal e $d\mathbf{r}$ o deslocamento efetuado nesse intervalo pelo elemento de fluido em seu movimento real, *i.e.*, $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$; a figura

Figura 8.5: Deslocamento arbitrário $d\mathbf{r}$ e deslocamento real da partícula $\mathbf{v}dt$.

8.5 ilustra um deslocamento arbitrário $d\mathbf{r}$ e o particular deslocamento $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ durante o movimento real do fluido. No deslocamento real do elemento durante o intervalo infinitesimal dt , (8.30) reduz-se a

$$d\Phi(P, t) = \left[\frac{\partial\Phi(P, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(P, t) \cdot \nabla\Phi(P, t) \right] dt, \quad (8.31)$$

onde explicitamos as variáveis P e t do campo Φ . A equação (8.31) dá a variação $d\Phi$ da propriedade Φ no elemento de fluido, durante o intervalo de tempo dt , sendo $\mathbf{v}(P, t)$ nessa equação a velocidade do fluido em P no instante t . Desse modo, a taxa instantânea de variação de uma propriedade Φ de um elemento móvel do fluido, que no instante t está em P , é dada por

$$\frac{d\Phi(P, t)}{dt} = \frac{\partial\Phi(P, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(P, t) \cdot \nabla\Phi(P, t). \quad (8.32)$$

A velocidade $\mathbf{v}(P, t)$ nessa equação pode ser considerada como uma variável euleriana, dada pela função

$$\begin{aligned} \mathbf{v} : \mathcal{M} \times I &\longrightarrow T(\mathcal{E}) \\ &: (P, t) \longmapsto \mathbf{v}(P, t). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Conseqüentemente, podemos descrever por meio de (8.32) a variação de qualquer propriedade Φ de um elemento genérico do fluido em termos apenas de variáveis eulerianas, nomeadamente, Φ e \mathbf{v} . A equação (8.32) é escrita, abreviadamente, como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (8.34)$$

Essa particular derivada temporal d/dt é chamada **derivada material**. Neste contexto, $\partial/\partial t$ é chamada **derivada local** e $\mathbf{v} \cdot \nabla$, **derivada convectiva**.

Agora, passemos à taxa de variação do volume ocupado por uma porção do fluido. Vamos considerar uma dada porção do fluido como o sistema físico e chamar de **região do sistema** no instante t a região ocupada por ele no instante t ; representamos a

região do sistema por $\mathcal{R}(t)$. O volume ocupado pelo sistema, que chamamos **volume do sistema**, é dado por

$$V(t) = \int_{\mathcal{R}(t)} dV . \quad (8.35)$$

Em contrapartida, uma região prescrita no espaço é chamada **região de controle**. Estaremos considerando regiões prescritas fixas, *i.e.*, que não mudam com o tempo. Por definição, não há passagem de matéria através da fronteira da região de um sistema. Já em uma região de controle tal passagem é possível. É claro que uma região de controle em \mathcal{M} é, a cada instante, a região do sistema que neste instante passa por ele, mas não permanece a região desse sistema com o passar do tempo, a menos, é claro, que o fluido esteja em repouso.

Para calcular a variação temporal do volume do sistema, consideremos o movimento de um elemento de superfície pertencente à fronteira $\partial\mathcal{R}(t)$ de $\mathcal{R}(t)$. Seja dA a área do elemento e \mathbf{n} a normal a ele que aponta para fora da região $\mathcal{R}(t)$. Supondo a continuidade do campo (8.33), podemos considerar o elemento de superfície imerso em uma região infinitesimal na qual a velocidade \mathbf{v} do fluido é uniforme, conforme ilustrado na figura 8.6. A variação de volume provocada pelo deslocamento do ele-

Figura 8.6: Movimento de um elemento da fronteira da região do sistema.

mento de superfície, em um intervalo de tempo infinitesimal dt , é dada por

$$d^2V(t) = \mathbf{v}dt \cdot \mathbf{n}dA . \quad (8.36)$$

Portanto, nesse intervalo de tempo, a variação de volume da região é

$$dV(t) = \oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dA dt . \quad (8.37)$$

Esse resultado nos permite escrever

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} dV = \oint_{\partial\mathcal{R}(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA . \quad (8.38)$$

Assim como em (8.32), aqui também se faz necessário o campo de velocidades (8.33) para calcularmos a variação temporal de propriedades de uma porção móvel do fluido. Usando o teorema da divergência de Gauss em (8.38), obtemos

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} dV = \int_{\mathcal{R}(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} dV , \quad (8.39)$$

que é a taxa de variação do volume ocupado pela porção do fluido em consideração.

No caso de uma região infinitesimal $\delta\mathcal{R}(t)$, obtemos de (8.39) o resultado

$$\frac{d}{dt} \delta V(t) = \frac{d}{dt} \int_{\delta\mathcal{R}(t)} dV = \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V(t) . \quad (8.40)$$

Essa expressão mostra que, em cada ponto P , $\nabla \cdot \mathbf{v}$ é a taxa instantânea de variação do volume do fluido, por unidade de volume,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{\mathcal{R}(t) \rightarrow P} \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{R}(t))} \frac{d}{dt} \text{vol}(\mathcal{R}(t)) . \quad (8.41)$$

Podemos dizer que a divergência $\nabla \cdot \mathbf{v}$ é uma medida da expansibilidade ou compressibilidade do fluido, conforme a divergência seja positiva ou negativa, respectivamente.

Um fluido é dito incompressível se $\text{vol}(\mathcal{R}(t))$ é constante para qualquer região $\mathcal{R}(t)$ considerada. Usando (8.41), obtemos como condição de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (8.42)$$

O rotacional da velocidade é relacionado com a componente de rotação do movimento do fluido em cada ponto. Para simplificar, suponhamos por um momento que o fluido, além de incompressível, seja também indeformável nas vizinhanças de um ponto P . Sendo indeformável, o movimento do fluido será como o de um corpo rígido, *i.e.*, uma composição de translação e rotação. A componente de rotação do movimento é dada por

$$\mathbf{v}(P + \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} , \quad (8.43)$$

onde \mathbf{r} é infinitesimal para que $P + \mathbf{r}$ esteja nas vizinhanças de P e $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular de rotação da porção do fluido nas vizinhanças de P . Tomando o rotacional de ambos os membros da equação anterior e, posteriormente, o limite $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$, obtemos

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} , \quad (8.44)$$

que demonstra a relação anunciada acima entre rotação do fluido e rotacional da velocidade. O rotacional da velocidade em um ponto é chamado **vorticidade** do fluido no ponto. No caso genérico em que o fluido é deformável, há um teorema devido a Cauchy que afirma que o escoamento mais geral é, em um dado instante,

Figura 8.7: Translação, rotação e dilatação do fluido.

em cada vizinhança, uma superposição de uma translação com uma rotação e uma deformação, sendo a rotação dada por (8.44). Se o escoamento não tem vorticidade em nenhum ponto, ele é dito **irrotacional**.

A circulação da velocidade de um fluido está relacionada com a vorticidade por meio do teorema de Stokes,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA . \quad (8.45)$$

É somente dentro das condições de validade deste teorema que podemos relacionar a rotação global do fluido em uma região, dada pela circulação, com a rotação local em cada ponto da região, dada pela vorticidade.

A conservação da massa de qualquer porção do fluido impõe ao escoamento um vínculo que relaciona os dois campos fundamentais associados ao fluido, a saber, o campo de densidades (8.1) e o campo de velocidades (8.33). Para obter essa relação, consideremos, primeiramente, a expressão da quantidade de massa que atravessa durante um intervalo infinitesimal de tempo dt uma superfície infinitesimal fixa de área orientada $\mathbf{n} \, dA$. Essa quantidade, que denotamos por $d^2m'(t)$, é dada por

$$d^2m'(t) = \rho \mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n} dA . \quad (8.46)$$

Esse resultado é obtido de uma maneira quase idêntica à usada para se obter (8.36), e a figura que ilustra (8.46) é muito parecida com a figura 8.6. Tomando uma região de controle \mathcal{R} , e usando (8.46), obtemos que a quantidade de massa abandonando a região por unidade de tempo é

$$\frac{dm'(t)}{dt} = \oint_{\partial \mathcal{R}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA . \quad (8.47)$$

Denotando por $m(t)$ a massa na região \mathcal{R} no instante t , temos

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} \rho dV = \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV . \quad (8.48)$$

A conservação da massa se expressa pela relação $dm(t)/dt = -dm'/dt$ que, em virtude de (8.48) e (8.47), assume a forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} \rho dV = - \oint_{\partial \mathcal{R}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA , \quad (8.49)$$

que é equivalente a

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_{\partial \mathcal{R}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA . \quad (8.50)$$

Usando nessa expressão o teorema da divergência de Gauss e levando em conta que a região de controle \mathcal{R} é arbitrária, obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 , \quad (8.51)$$

que denominamos **equação da continuidade** do fluido em consideração. Naturalmente, ela é equivalente ao postulado de conservação da massa de qualquer porção do fluido. Notemos que essa equação também pode ser escrita na forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \quad (8.52)$$

se usarmos a relação (8.34) entre derivada material e local. Muitas vezes chamamos (8.51) **equação da continuidade em forma local, ou diferencial**, para distingui-la de (8.49), que é chamada **equação da continuidade em forma global, ou integral**.

Na dedução da equação da continuidade torna-se claro que, para analisar o escoamento do fluido, é conveniente definir o campo

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} , \quad (8.53)$$

que chamamos **densidade superficial de corrente** do fluido, ou, simplesmente, **corrente** do fluido. Em termos da corrente, a equação da continuidade (8.51) toma a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (8.54)$$

Seja \mathcal{S} uma superfície orientada e \mathbf{n} seu vetor unitário normal. Definimos **intensidade de corrente** do fluido através dessa superfície como sendo a quantidade

$$I(t) = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(P, t) \cdot \mathbf{n} dA . \quad (8.55)$$

Naturalmente, $I(t)$ é a massa por unidade de tempo que cruza \mathcal{S} no sentido de \mathbf{n} . Um intensidade de corrente negativa indica que há massa atravessando a superfície no sentido oposto ao da normal.

Um escoamento é dito **estacionário** quando, em cada ponto, a velocidade e demais variáveis eulerianas associadas ao fluido permanecem constantes com o passar do tempo, *i.e.*, $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{0}$, $\partial \rho / \partial t = 0$, etc. A equação da continuidade (8.54) mostra que no escoamento estacionário a corrente é **solenoidal**, *i.e.*, possui divergência nula.

Em um instante fixo t , uma linha que é tangente em cada ponto P ao vetor de corrente $\mathbf{j}(P, t)$ é chamada **linha de corrente**. Toma-se a orientação da linha de corrente no sentido da corrente. Uma vez que $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ e ρ é um escalar positivo, podemos, equivalentemente, definir a linha de corrente em um dado instante como a linha tangente à velocidade em cada ponto. Assim, a linha de corrente fica definida por

$$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{v}(p, t), \quad (8.56)$$

onde $d\mathbf{r}$ é o elemento da linha em um ponto P arbitrário no instante t . Em um instante fixo as linhas de corrente não se cruzam em nenhum ponto. Elas são contínuas onde a velocidade \mathbf{v} é contínua e diferente de zero.

Seja \mathcal{S} uma superfície aberta em \mathcal{M} , interceptada por cada linha de corrente em um único ponto. O conjunto de todas as linhas de corrente que atravessam \mathcal{S} forma uma região em \mathcal{M} de forma tubular. Essa região é chamada **tubo de corrente**. A superfície \mathcal{S} , ou qualquer outra superfície atravessada uma única vez por cada linha do tubo, é chamada uma **seção** do tubo de corrente. Se as linhas de corrente

Figura 8.8: Tubo de corrente através de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , com superfície lateral \mathcal{S}_L .

atravessam ortogonalmente a seção, essa é chamada **seção reta** do tubo de corrente. A porção do tubo entre duas seções, é também chamada **tubo de corrente**. A parte da fronteira do tubo que só tangencia linhas de corrente é chamada de **superfície lateral** do tubo. Um tubo de corrente de seção reta infinitesimal é chamado **filete**.

Linhas e tubos são especialmente úteis no estudo do escoamento estacionário, caso em que as trajetórias das partículas do fluido coincidem com as próprias linhas de corrente e essas não se deformam com o passar do tempo. Além disso, no escoamento estacionário as linhas de corrente são fechadas e a intensidade $I(t)$ dada por (8.55) é invariável no interior de cada tubo.

8.4 Dinâmica de um fluido ideal

Fluido ideal é um fluido no qual as únicas tensões presentes são de pressão e não há trocas de calor entre suas partes. Em contrapartida, os fluidos reais têm viscosidade, propriedade pela qual há forças de atrito entre suas partes, que causam tensões de cisalhamento, trações e trocas de calor. Entretanto, em uma variedade de situações, muitos dos fluidos encontrados na natureza têm um comportamento próximo ao do fluido ideal, cujo estudo torna-se, por esse motivo, muito útil e relevante.

Em um fluido em movimento a tensão depende não apenas da posição e orientação do elemento de superfície sobre o qual ela age, como também do instante t em que age. Assim, temos para o fluido ideal

$$\boldsymbol{\tau} = -p(P, t; \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (8.57)$$

onde p é positiva por hipótese. Naturalmente, nessas circunstâncias, também a força volumar pode depender do tempo e temos para a sua densidade volumar

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathcal{M} \times I &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ : (P, t) &\longmapsto \mathbf{f}(P, t). \end{aligned} \quad (8.58)$$

Em um instante t , fixo e arbitrário, consideremos uma porção cilíndrica de fluido, de área da base dA , altura central ε e eixo ao longo de um unitário $\hat{\mathbf{s}}$, exatamente como a ilustrada na figura 8.6. No caso presente, a porção do fluido pode ter uma aceleração $d\mathbf{v}/dt$ e a componente ao longo de $\hat{\mathbf{s}}$ da Segunda Lei de Newton é dada por

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{s}} \cdot \left[\rho(P, t) \varepsilon dA \frac{d\mathbf{v}(P, t)}{dt} \right] \\ &= \hat{\mathbf{s}} \cdot \left[\mathbf{f}(P + \hat{\mathbf{s}} \varepsilon/2, t) \varepsilon dA - p(P + \hat{\mathbf{s}} \varepsilon, t; \mathbf{n}') \mathbf{n}' dA' - p(P, t; \mathbf{n}) \mathbf{n} dA \right], \end{aligned} \quad (8.59)$$

No caso estático, essa equação reduz-se à equação (8.9). Da equação (8.59), obtemos

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \left[\rho(P, t) \frac{d\mathbf{v}(P, t)}{dt} \right] \varepsilon = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{f}(P + \hat{\mathbf{s}} \varepsilon/2, t) \varepsilon - p(P + \hat{\mathbf{s}} \varepsilon, t; \mathbf{n}') + p(P, t; \mathbf{n}), \quad (8.60)$$

onde foi usado que $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}' dA' = dA$. No limite $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos, como no caso estático, que p independe da normal \mathbf{n} . Portanto, a pressão em um fluido ideal é dada por um campo escalar positivo

$$\begin{aligned} p : \mathcal{M} \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : (P, t) &\longmapsto p(P, t). \end{aligned} \quad (8.61)$$

Usando esse resultado na equação (8.60), dividindo-a por ε e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \left[\rho(P, t) \frac{d\mathbf{v}(P, t)}{dt} + \nabla p(P, t) \right] = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{f}(P, t). \quad (8.62)$$

Uma vez que $\hat{\mathbf{s}}$ é arbitrário, temos

$$\rho(P, t) \frac{d\mathbf{v}(P, t)}{dt} + \nabla p(P, t) = \mathbf{f}(P, t), \quad (8.63)$$

que é a **equação de Euler** do movimento de um fluido ideal. Podemos usar (8.34) para eliminar a derivada material da equação de Euler e escrevê-la como

$$\rho(P, t) \frac{\partial \mathbf{v}(P, t)}{\partial t} + (\rho(P, t) \mathbf{v}(P, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(P, t) + \nabla p(P, t) = \mathbf{f}(P, t), \quad (8.64)$$

ou, mais simplificadamente, omitindo as variáveis dos campos,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (8.65)$$

A equação de Euler é a equação fundamental da dinâmica do fluido ideal. É a equação que determina os movimentos possíveis desse fluido. Naturalmente, é uma expressão, em termos de variáveis eulerianas, da Segunda Lei de Newton aplicada às partículas que formam o fluido.

8.5 Momento linear, momento angular e energia

Agora, estudemos como o momento linear, o momento angular e a energia se distribuem em um fluido em movimento. Seja um região de controle \mathcal{R} em \mathcal{M} e o sistema constituído pelo fluido nela contido em um instante t . Ele ocupa uma região $\mathcal{R}(t)$ que varia com o tempo e que, por hipótese, coincide com a região de controle \mathcal{R} no instante t , ou seja, $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}$.

Consideremos a região $\mathcal{R}(t)$ dividida em subregiões infinitesimais. Na região $\delta\mathcal{R}(t)$, de volume $\delta V(t)$, o elemento de fluido tem massa $\delta m = \rho(P, t) \delta V(t)$ e velocidade $\mathbf{v}(P, t)$. O momento linear do elemento de fluido é $\rho(P, t) \delta V(t) \mathbf{v}(P, t)$. Multiplicando ambos os membros da equação de Euler (8.63) pelo volume $\delta V(t)$, obtemos

$$\rho \delta V(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{f} - \nabla p) \delta V(t). \quad (8.66)$$

Embora densidade e volume do elemento mudem com o tempo, o produto $\rho \delta V(t)$ é a massa δm do elemento e, portanto, uma constante. Introduzindo-a dentro do símbolo de derivada em (8.66), chegamos à seguinte expressão para a taxa instantânea de variação do momento linear do elemento de fluido,

$$\frac{d}{dt} [\rho \mathbf{v} \delta V(t)] = (\mathbf{f} - \nabla p) \delta V(t). \quad (8.67)$$

Somando para todas as regiões infinitesimais no instante t , obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{f} dV - \int_{\mathcal{R}(t)} \nabla p dV. \quad (8.68)$$

Naturalmente, o vetor

$$\mathbf{P} = \int_{\mathcal{R}(t)} \rho \mathbf{v} dV \quad (8.69)$$

é o momento linear da porção de fluido na região $\mathcal{R}(t)$, de modo que (8.68) é uma expressão da taxa instantânea de variação do momento linear dessa porção do fluido.

Usando na equação (8.68) a identidade (8.19), podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{f} dV + \oint_{\partial\mathcal{R}(t)} (-p\mathbf{n}) dA, \quad (8.70)$$

que tem um significado claro, qual seja, a taxa instantânea de variação do momento linear da porção de fluido em $\mathcal{R}(t)$ é igual à força externa total que age sobre a porção; a volumar, que age no interior da região $\mathcal{R}(t)$, e a superficial que age na fronteira $\partial\mathcal{R}(t)$ da região. No membro direito dessa equação, podemos substituir a região do sistema $\mathcal{R}(t)$ pela região de controle \mathcal{R} , mas no membro esquerdo é necessário, antes dessa substituição, calcular a derivada temporal que nele aparece.

Temos para um campo vetorial \mathbf{j} qualquer

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{j}(P, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\mathcal{R}(t+\Delta t)} \mathbf{j}(P, t + \Delta t) dV - \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{j}(P, t) dV \right\}, \quad (8.71)$$

donde obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{j}(P, t) dV = \int_{\mathcal{R}(t)} \frac{\partial \mathbf{j}(P, t)}{\partial t} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\mathcal{R}(t+\Delta t)} \mathbf{j}(P, t) dV - \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{j}(P, t) dV \right\}. \quad (8.72)$$

Figura 8.9: Região do sistema no instante t e no instante $t + \delta t$.

Devido a Δt ser infinitesimal, podemos escrever a diferença das integrais entre chaves em (8.72) como uma integral de superfície e obter

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{j}(P, t) dV = \int_{\mathcal{R}(t)} \frac{\partial \mathbf{j}(P, t)}{\partial t} dV + \oint_{\partial\mathcal{R}(t)} \mathbf{j}(P, t) [\mathbf{v}(P, t) \cdot \mathbf{n}(P, t)] dA. \quad (8.73)$$

Nessa igualdade, a integral na superfície $\partial\mathcal{R}(t)$ não está sendo derivada e, portanto, podemos usar a igualdade $\partial\mathcal{R}(t) = \partial\mathcal{R}$, válida no instante t , para obter

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{j} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{j} dV + \oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{j}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA . \quad (8.74)$$

Essa igualdade relaciona a derivada temporal de uma integral na região do sistema a integrais na fronteira e no interior da região de controle que coincide com a região do sistema no instante em consideração. Notemos que, em momento algum na dedução dessa igualdade, foi usado o caráter vetorial de \mathbf{j} , de modo que obtemos uma igualdade verdadeira se substituirmos em (8.74) o campo vetorial \mathbf{j} por um campo escalar ou por qualquer outro campo. Agora, vamos aplicar (8.74) ao caso em que $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, e usar o resultado obtido em (8.70), para chegarmos a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} \rho\mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{f} dV + \oint_{\partial\mathcal{R}} (-p\mathbf{n}) dA - \oint_{\partial\mathcal{R}} \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA . \quad (8.75)$$

Essa é a taxa instantânea de variação do momento linear do fluido contido na região de controle \mathcal{R} , que devemos comparar com a taxa instantânea de variação do momento linear da porção do fluido contido na região do sistema $\mathcal{R}(t)$, dada em (8.70). Essa última taxa de variação se deve à ação das forças sobre a porção de fluido, a força volumar \mathbf{f} e a força superficial $-p\mathbf{n}$, conforme especificado em (8.70). Já na equação (8.75), a taxa de variação do momento linear contido na região de controle \mathcal{R} se deve à força volumar \mathbf{f} , à força superficial $-p\mathbf{n}$ e, além disso, à taxa de evasão do momento linear pela fronteira da região de controle. Obviamente, se não houver evasão do fluido pela fronteira da região, as duas taxas de variação coincidem.

Seja um ponto base em relação ao qual definimos o vetor-posição \mathbf{r} de cada elemento da porção do fluido em consideração. O momento angular relativo ao ponto base, da porção toda, que tem $\mathcal{R}(t)$ como região de sistema, é

$$\mathbf{L} = \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{r} \times \rho\mathbf{v} dV \quad (8.76)$$

A taxa instantânea de variação desse momento angular é obtida a partir da equação de Euler (8.63) e é dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{r} \times \rho\mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{R}(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \oint_{\partial\mathcal{R}(t)} \mathbf{r} \times (-p\mathbf{n}) dA , \quad (8.77)$$

Usando (8.74), podemos determinar a taxa de variação temporal do momento angular contido em uma região de controle \mathcal{R} , qual seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{r} \times \rho\mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \times (-p\mathbf{n}) dA - \oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \times \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA . \quad (8.78)$$

Para determinar a distribuição de energia no escoamento, multiplicamos a equação de Euler(8.63) escalarmente pela velocidade e chegamos a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 \delta V(t) \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \delta V(t) - \mathbf{v} \cdot \nabla p \delta V(t) . \quad (8.79)$$

Esse é o teorema da energia cinética e trabalho para o elemento de fluido. O membro esquerdo dessa equação é taxa temporal de variação da energia cinética do elemento de fluido. O membro direito é a potência transmitida ao elemento de fluido pelas forças volumares e superficiais que agem sobre ele. É instrutivo verificar que o último termo em (8.79) é, de fato, o trabalho por unidade de tempo realizado pelas forças de pressão sobre o elemento. Parte desse trabalho por unidade de tempo pode ser escrita, usando a fórmula da derivada material (8.34) e a derivada temporal do elemento de volume dada em (8.41), como a derivada total do produto da pressão pelo elemento de volume,

$$\begin{aligned} -\mathbf{v} \cdot \nabla p \delta V(t) &= \left(-\frac{dp}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) \delta V(t) \\ &= -\frac{d}{dt} [p \delta V(t)] + p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V(t) + \frac{\partial p}{\partial t} \delta V(t). \end{aligned} \quad (8.80)$$

O produto $p\delta V(t)$ entre colchetes representa uma energia potencial que o elemento de fluido possui pelo fato de estar sujeito a uma pressão p . Além dessa parte da potência transmitida ao elemento, acumulada como energia potencial, a equação (8.80) mostra outras duas parcelas da potência fornecida pelo gradiente de pressão. A parcela $p\nabla \cdot \mathbf{v}\delta V(t)$ deve-se à compressibilidade do fluido e a parcela $(\partial p/\partial t)\delta V(t)$ deve-se à possível variação com o tempo da pressão em um ponto fixo. Substituindo (8.80) em (8.79), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p \right) \delta V(t) \right] = \left[\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} \right] \delta V(t). \quad (8.81)$$

O trabalho por unidade de tempo no membro direito dessa equação depende da natureza específica do fluido e das forças externas que estivermos considerando. Se, por exemplo, $\mathbf{f}\delta V(t)$ for conservativa, a sua energia potencial poderá ser incorporada ao membro esquerdo de (8.81).

Considerando o caso comum em que a força volumar é gravitacional, temos

$$\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}_a}{\delta V(t)} = \frac{\delta m \mathbf{g}}{\delta V(t)} = \rho \mathbf{g}, \quad (8.82)$$

onde \mathbf{g} é o campo gravitacional. Uma vez que o campo gravitacional é conservativo, podemos usar um potencial gravitacional \mathcal{G} e escrever $\mathbf{g} = -\nabla \mathcal{G}$. Eliminando em (8.82) \mathbf{g} em favor desse potencial, podemos escrever $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \delta V(t) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \delta V(t) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{G}) \rho \delta V(t)$. Nessa expressão podemos usar a fórmula da derivada material (8.34) para substituir o termo $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{G}$ por derivadas temporais de \mathcal{G} e usarmos a constância de $\rho \delta V(t)$ para chegarmos ao resultado

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \delta V(t) = -\frac{d}{dt} \left[\rho \mathcal{G} \delta V(t) \right] + \rho \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \delta V(t), \quad (8.83)$$

Substituindo essa equação em (8.81), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \mathcal{G} \right) \delta V(t) \right] = \left[p \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right] \delta V(t), \quad (8.84)$$

onde, agora, temos a energia potencial gravitacional $\rho\delta V(t)\mathcal{G}$ incorporada ao membro esquerdo da equação da energia.

O termo $p\nabla \cdot \mathbf{v}\delta V(t)$ em (8.84) depende fortemente das características do fluido. Usando a equação da continuidade (8.52) e a relação $\delta V(t) = dm/\rho$, temos para esse termo

$$p\nabla \cdot \mathbf{v}\delta V(t) = -p\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{dm}{\rho} = -dm\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}. \quad (8.85)$$

A condição para que esse trabalho por unidade de tempo seja uma derivada total, digamos de uma função u ,

$$\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \frac{du}{dt}, \quad (8.86)$$

é que a densidade seja função somente da pressão (ou, se preferirmos, que a pressão seja função somente da densidade). Nesse caso, podemos escrever para u a expressão

$$u(p) = \int_{p_0}^p \frac{p'}{[\rho(p')]^2} \frac{d\rho(p')}{dp'} dp', \quad (8.87)$$

onde p_0 é uma pressão fixa de referência, na qual convençamos que u tem valor nulo. Portanto, supondo as condições para que exista uma tal função u , vale a equação (8.86) que, usada em (8.85), nos fornece a igualdade

$$p\nabla \cdot \mathbf{v}\delta V(t) = -\frac{d}{dt} \left[\rho u \delta V(t) \right], \quad (8.88)$$

em virtude da qual a equação (8.84) toma a forma

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho u + \rho\mathcal{G} \right) \delta V(t) \right] = \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right] \delta V(t). \quad (8.89)$$

Temos no membro esquerdo dessa equação a taxa de variação temporal da soma da energia cinética com diversas energias potenciais do elemento de fluido. No membro direito são expressos os processos pelos quais potência é transferida ao elemento.

Para considerar as energias e os trabalhos por unidade de massa do fluido, dividimos a Eq.(8.89) pela massa elementar $dm = \rho\delta V(t)$ e obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u + \mathcal{G} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}. \quad (8.90)$$

A equação anterior é conhecida como **teorema de Bernoulli**.

Em um escoamento estacionário o membro direito da equação (8.90) é nulo,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u + \mathcal{G} \right) = 0, \quad (8.91)$$

de modo que obtemos

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u + \mathcal{G} = \text{constante}, \quad (8.92)$$

onde as quantidades no membro esquerdo são calculadas no ponto onde se encontra o elemento de fluido e o valor da constante no membro direito depende do elemento de fluido que é considerado. Utilizando a definição de estado estacionário e a definição de linha de corrente, obtemos, a partir de (8.91), que o membro esquerdo de (8.92) é constante ao longo de cada linha de corrente, embora a constante possa diferir de uma linha para outra. A igualdade (8.92) é o **teorema de Bernoulli para o escoamento estacionário**.

Em muitas situações de interesse prático, como a de escoamentos estacionários em tubulações, é de utilidade uma formulação do teorema de Bernoulli em termos de tubos de corrente. Para obtê-la aplicamos a fórmula (8.74) à equação (8.89) e particularizamos o resultado ao caso de escoamento estacionário. Com isso, obtemos

$$\oint_{\partial\mathcal{R}} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho u + \rho\mathcal{G} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0. \quad (8.93)$$

Tomando \mathcal{R} como sendo um tubo de corrente, chegamos ao resultado procurado,

$$\int_{\mathcal{S}} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho u + \rho\mathcal{G} \right) v dA = \text{const.}, \quad (8.94)$$

no qual \mathcal{S} é uma seção reta arbitrária do tubo de corrente em consideração.

Capítulo 9

Movimento de um corpo rígido

9.1 Introdução

Um corpo rígido é definido como um sistema de partículas que mantêm entre si as distâncias relativas constantes. Para quaisquer duas partículas i e j dentre as N partículas do corpo rígido, com vetores-posição \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j , temos, por definição,

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = a_{ij} \quad (i, j = 1 \dots N), \quad (9.1)$$

onde a_{ij} é constante. Um corpo rígido fica especificado pelas massas de suas partículas e pelos valores dessas constantes. Muitas das afirmações sobre um corpo rígido pressupõem que ele seja tridimensional, *i.e.*, constituído por um mínimo de quatro partículas que não sejam coplanares. Quando nos referirmos a um corpo rígido, sem mais especificações, estaremos pressupondo que ele é tridimensional.

Todo corpo rígido pode ser considerado como um referencial, o que freqüentemente se faz no estudo de seu movimento. Esse referencial é denominado **referencial do corpo rígido** e, obviamente, em relação a ele, todas as suas partículas estão em repouso. O conjunto formado por todos os pontos do espaço em repouso relativamente ao referencial do corpo rígido é chamado **corpo rígido estendido**. Determinar o movimento de um corpo rígido é equivalente a determinar o movimento do corpo rígido estendido. Muitas vezes, quando nos referimos a um ponto do corpo rígido, entendemos, pelo contexto, que pode ser um ponto do corpo rígido estendido, não necessariamente do corpo rígido propriamente dito. Notemos que o corpo rígido estendido é, de fato, todo o espaço, mas fixo em relação ao corpo rígido. O referencial do corpo rígido não deve ser confundido com o referencial que está sendo usado para descrever o movimento do corpo rígido; é a este que estamos nos referindo quando falamos de referencial sem mais especificações.

A posição de um corpo rígido no espaço, *i.e.*, a configuração das partículas que o compõem, fica univocamente determinada por seis coordenadas. De fato, com três coordenadas podemos especificar as possíveis posições de um ponto do corpo, digamos o ponto P_1 . Observemos, então, que as posições possíveis de um outro ponto do corpo, digamos P_2 , estão em uma superfície esférica centrada em P_1 , cujo raio é a distância, fixa e dada, entre P_1 e P_2 . A posição de P_2 nesta superfície esférica é determinada

por duas coordenadas. Com as posições de P_1 e P_2 especificadas, ficam também especificadas as posições de todos os pontos do corpo que estão na reta que passa por P_1 e P_2 . Um ponto P_3 , que não esteja nessa reta, está a uma distância fixa dela. Portanto, as posições possíveis de P_3 estão em uma circunferência centrada na reta que passa por P_1 e P_2 e com jazitura perpendicular a ela. A posição de P_3 nesta circunferência é determinada por uma única coordenada. Não é difícil perceber que junto com P_3 ficam determinadas as posições dos demais pontos do corpo, devido à sua rigidez. De fato, se tomarmos um quarto ponto do corpo, digamos P_4 , uma vez que estão fixas as respectivas distâncias dele aos três pontos não-colineares P_1 , P_2 e P_3 , ele não tem liberdade para mover-se, estando a sua posição por esse motivo totalmente especificada.

Desse modo, para especificar uma configuração genérica de um corpo rígido são necessárias seis coordenadas. Dizemos que o espaço de configurações do corpo rígido tem dimensão seis. Para determinar o movimento do corpo rígido devemos determinar as seis funções que dão essas coordenadas em função do tempo.

O movimento de qualquer sistema de partículas obedece a seis equações escalares, dadas pela três equações vetoriais

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ex} \quad (9.2)$$

e

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q^{ex}, \quad (9.3)$$

na qual o ponto base Q pode ser tomado como o centro de massa ou um ponto qualquer fixo no referencial inercial em uso. As três equações em (9.2), aplicadas a um corpo rígido, determinam o movimento de seu centro de massa; elas determinam as três coordenadas do centro de massa em função do tempo. Nesse caso, resta determinar o movimento de rotação do corpo rígido em torno do seu centro de massa, o que é feito pelas três equações em (9.3), se tomarmos Q como sendo o centro de massa; elas dão conta das três outras coordenadas do corpo rígido. Se o corpo rígido tiver um ponto fixo no referencial inercial, seu movimento é de rotação em torno desse ponto. Nesse caso, o movimento é determinado pelas três equações em (9.3), se tomarmos Q como sendo o ponto fixo em questão. Em ambos os casos, podemos usar as equações (9.2) e (9.3) para determinar o movimento do corpo rígido, sendo que as três últimas equações (9.3) determinam o movimento de rotação do corpo, seja em torno do centro de massa, seja em torno de um ponto fixo. A teoria desse capítulo consiste, essencialmente, em aplicar as referidas equações ao estudo do movimento do corpo rígido.

Seja \mathbf{r} o vetor-posição de uma partícula qualquer de um sistema, $d\mathbf{r}/dt$ a correspondente velocidade. Seja um movimento qualquer do sistema no qual posição e velocidade obedecem, a cada instante, a relação

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (9.4)$$

na qual $\boldsymbol{\omega}$ é um vetor prescrito, constante ou não. Verifiquemos que um tal movimento não muda as distâncias relativas entre as partícula do sistema (dizemos que é um

movimento cinematicamente possível para um corpo rígido). Com esse objetivo, aplicamos a equação (9.4) a duas partículas quaisquer do sistema, com vetores-posição \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j , e subtraímos as equações resultantes, obtendo $d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)/dt = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Multiplicando escalarmente por $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ ambos os membros dessa equação, obtemos $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = \text{constante}$, como havíamos afirmado.

Consideremos um corpo rígido com um movimento que obedece à relação (9.4). É fácil perceber que, em um tal movimento, permanece em repouso a origem em relação ao qual tomamos os vetores-posição dos pontos do corpo. Desse modo, o movimento é de rotação em torno dessa origem. Além disso, a cada instante, estão em repouso todos os pontos do corpo de uma reta que passa pela origem e tem a direção de $\boldsymbol{\omega}$; fora dessa reta nenhum ponto está em repouso se $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$. Essa reta, na qual estão instantaneamente em repouso os pontos do corpo rígido, pode ser dotada de um sentido convencional. O eixo assim obtido é chamado **eixo instantâneo de rotação** do corpo rígido. Esse movimento de rotação em que há um tal eixo é chamado **movimento de rotação em torno do eixo**. Uma vez que $\boldsymbol{\omega}$ pode variar com o tempo, o eixo instantâneo também pode, de modo que o conjunto dos pontos do corpo rígido que estão instantaneamente em repouso pode mudar de instante para instante. Se o eixo permanece o mesmo durante todo o movimento, ele é dito um eixo fixo e o movimento do corpo é chamado **rotação em torno de eixo um eixo fixo**. A relação (9.4) entre posição \mathbf{r} e velocidade fica definida pelo vetor prescrito $\boldsymbol{\omega}$; além disso nenhum outro vetor diferentes de $\boldsymbol{\omega}$ pode definir a mesma relação entre os vetores de posição e velocidade de um corpo rígido estendido. De fato, dado um vetor $\boldsymbol{\omega}'$, obtemos de (9.4) e de $d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}$, que $(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$; usando, então, que \mathbf{r} é arbitrário, chegamos a $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$. O vetor $\boldsymbol{\omega}$ é chamado **velocidade angular** do movimento de rotação em torno do eixo em questão. Naturalmente, a velocidade angular depende do referencial em relação ao qual estamos considerando o movimento, *i.e.*, é relativa ao referencial em consideração.

O vetor-posição de cada ponto de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo é a soma de um vetor paralelo ao eixo de rotação com um vetor perpendicular a ele. O primeiro é $\mathbf{r}_{\parallel} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}$, a projeção vetorial do vetor-posição ao longo da velocidade angular, e o segundo, $\mathbf{r}_{\perp} = \Pi_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}$, a projeção vetorial do vetor-posição na jazitura perpendicular à velocidade angular. A distância de cada ponto do corpo ao eixo de rotação é $|\mathbf{r}_{\perp}|$ e o módulo de sua velocidade é $|\mathbf{v}| = \omega |\mathbf{r}_{\perp}|$, como é imediato obter de (9.4). Já a direção da velocidade de cada ponto é sempre perpendicular ao plano que passa pelo ponto e pelo eixo de rotação, também de acordo com (9.4). Essas gradezas características de uma rotação em torno de um eixo com velocidade $\boldsymbol{\omega}$ estão ilustradas na figura 9.1. Notemos que a relação $|\mathbf{v}| = \omega |\mathbf{r}_{\perp}|$, há pouco mencionada, dota ω com o significado de taxa instantânea de variação de ângulo.

No caso em que o eixo de rotação é fixo, cada ponto do corpo descreve uma trajetória circular de raio $|\mathbf{r}_{\perp}|$, centro no ponto de vetor-posição \mathbf{r}_{\parallel} e contida no plano que passa por esse centro e é perpendicular ao eixo de rotação. Nesse caso, $\omega = d\varphi/dt$, onde φ é o ângulo entre \mathbf{r}_{\perp} e algum raio fixo de referência na trajetória circular. Se o eixo não é fixo, nada podemos dizer de antemão sobre as trajetórias dos pontos do corpo.

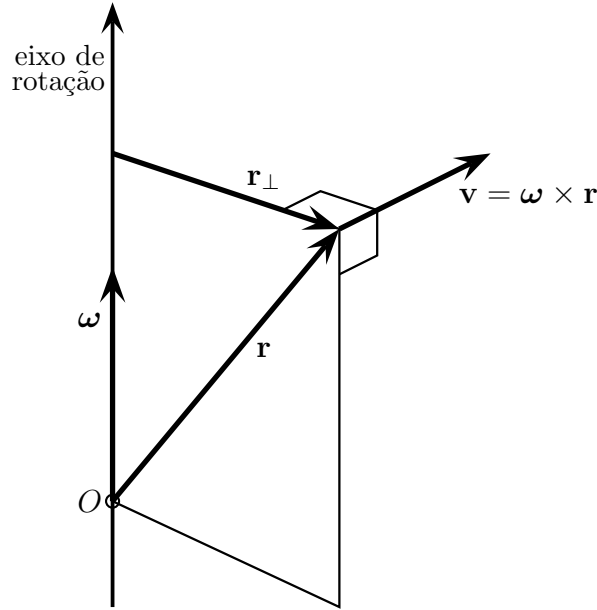


Figura 9.1: Posição e velocidade de um ponto de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo.

9.2 Noções de cinemática de um corpo rígido

Seja um referencial $\mathcal{R}ef$, no qual fixamos um sistema de eixos ortogonais $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$, com base de unitários ortonormais $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Consideremos um corpo rígido, que será nosso objeto de estudo, e nele fixemos um sistema de eixos ortogonais $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ com base de unitários ortonormais $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. Esses são os eixos do que chamamos referencial do corpo rígido, o qual denotaremos por $\mathcal{R}ef'$. O vetor-posição de um ponto relativo a referencial $\mathcal{R}ef$ é dado pelas componentes de

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad (9.5)$$

e o vetor-posição do mesmo ponto relativo ao referencial $\mathcal{R}ef'$ é dado pelas componentes de

$$\mathbf{r}' = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3. \quad (9.6)$$

A relação entre as coordenadas do mesmo ponto, em $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$, é obtida da igualdade

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{r}', \quad (9.7)$$

na qual $\mathbf{h} = \overrightarrow{OO'}$.

A velocidade do ponto relativa a $\mathcal{R}ef$ é dada pelas componentes de

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\mathbf{e}_3 \quad (9.8)$$

e a relativa a $\mathcal{R}ef'$, pelas componentes de

$$\mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx'_1}{dt}\mathbf{e}'_1 + \frac{dx'_2}{dt}\mathbf{e}'_2 + \frac{dx'_3}{dt}\mathbf{e}'_3, \quad (9.9)$$

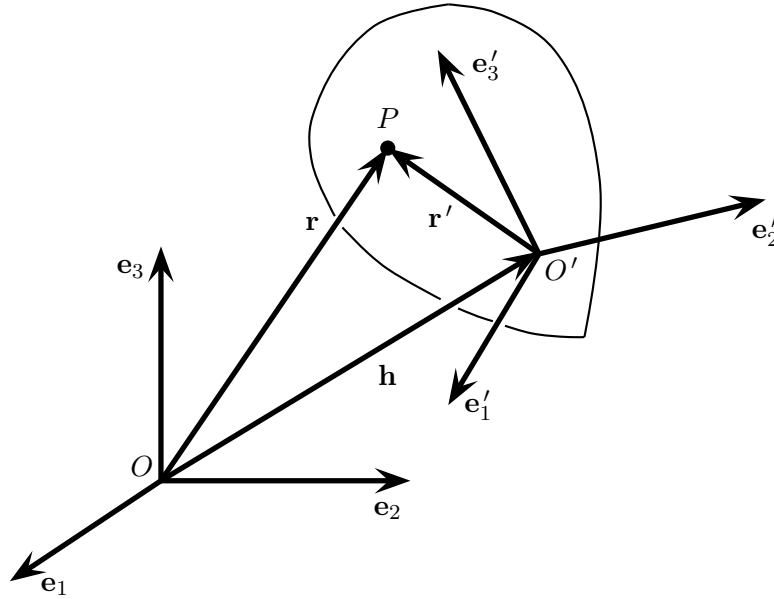


Figura 9.2: Os vetores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 formam a base do sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ do referencial em relação ao qual consideramos o movimento do corpo rígido. Os vetores \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 e \mathbf{e}'_3 formam a base do sistema de eixos $O\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ fixo no corpo rígido e, conseqüentemente, movendo-se junto com ele.

onde d'/dt denota a derivada de um vetor na qual se considera os vetores da base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ como constantes. Essa é a operação de derivação que se realiza para encontrar a taxa instantânea de variação de um vetor observada do referencial $\mathcal{R}ef'$. Em (9.8) temos que o símbolo usual de derivação temporal, d/dt , está sendo usado para denotar a derivada de um vetor na qual se considera os vetores da base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ como constantes, que é a operação realizada para se encontrar a taxa instantânea de variação de um vetor observada do referencial $\mathcal{R}ef$. Naturalmente, as derivadas de escalares, tais como as coordenadas, são as mesmas relativas aos dois referenciais e são denotadas por meio do símbolo usual d/dt .

Uma vez que os vetores da base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ de $\mathcal{R}ef'$ podem mover-se relativamente ao referencial $\mathcal{R}ef$, temos a relação

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + x'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt}, \tag{9.10}$$

na qual estamos usando a convenção de Einstein para índices repetidos, como continuaremos a fazer na dedução a seguir. Decompondo as derivadas $d\mathbf{e}'_i/dt$ dos vetores da base \mathcal{B}' nessa própria base, obtemos

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \xi_{ij} \mathbf{e}'_j \quad (i = 1, 2, 3), \tag{9.11}$$

onde ξ_{ij} é j -ésima componente na base \mathcal{B}' da derivada do i -ésimo vetor dessa base (notemos que em uma notação mais consistente usaríamos o símbolo ξ'_{ij} no lugar de ξ_{ij}). Usando essas componentes obtemos para a derivada do escalar $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) = \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \cdot \mathbf{e}'_j + \mathbf{e}'_i \cdot \frac{d\mathbf{e}'_j}{dt} = \xi_{ik} \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}'_j + \xi_{jk} \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k. \tag{9.12}$$

Mas $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$ é constante, pois são constantes os comprimentos dos vetores \mathbf{e}'_i e \mathbf{e}'_j e também os ângulos que fazem entre si. Conseqüentemente, as derivadas em (9.12) são nulas,

$$\xi_{ik} \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}'_j + \xi_{jk} \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k = 0. \quad (9.13)$$

Na verdade, estamos usando bases ortonormais, de modo que os vetores da base \mathcal{B}' obedecem às relações $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Com isso, (9.13) reduz-se a

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0, \quad (9.14)$$

ou seja, ξ_{ij} é uma quantidade antissimétrica nos seus dois índices. Portanto, apenas três dentre as nove coordenadas ξ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são independentes. Podemos escrever uma expressão para essas coordenadas que tornam explícitas essas características. Usando (9.14), obtemos

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}(\xi_{ij} - \xi_{ji}) = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{jm}\delta_{in})\xi_{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\xi_{mn}, \quad (9.15)$$

ou seja,

$$\xi_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega'_k, \quad (9.16)$$

onde as três quantidades ω'_k ($k = 1, 2, 3$) são dadas pela definição

$$\omega'_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kmn}\xi_{mn}. \quad (9.17)$$

Essas quantidades são univocamente definidas pelas relações (9.16), como é simples de se verificar mostrando que (9.17) é a única solução de (9.16).

Substituindo (9.16) em (9.11), obtemos

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \varepsilon_{ijk}\omega'_k\mathbf{e}'_j, \quad (9.18)$$

que, substituída em (9.10), nos fornece

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (9.19)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é definido como sendo o vetor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega'_i \mathbf{e}'_i. \quad (9.20)$$

Usando nessa definição as relações (9.11), (9.17) e a ortonormalidade da base \mathcal{B}' , obtemos

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} \left(\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \cdot \mathbf{e}'_j \right) \mathbf{e}'_k. \quad (9.21)$$

Um exame atento dessa relação mostra que $\boldsymbol{\omega}$ é um vetor que mede a rapidez de rotação dos unitários da base fixa no corpo rígido.

Agora, tomemos o ponto, cujas posições e velocidades em relação a \mathcal{B} e \mathcal{B}' estamos considerando, como sendo um ponto fixo no corpo rígido. Nesse caso $d'\mathbf{r}'/dt = \mathbf{0}$ e (9.19) reduz-se a

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (9.22)$$

A velocidade de um ponto do corpo rígido em relação ao referencial \mathcal{R}_{ef} é obtida derivando-se (9.7),

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (9.23)$$

e utilizando-se (9.22) para chegarmos a

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (9.24)$$

Vamos usar a notação de um ponto sobre o vetor para denotar sua taxa temporal de variação d/dt , relativa a \mathcal{R}_{ef} (a taxa relativa a \mathcal{R}_{ef}' continua a ser denotada apenas por d'/dt). Com essa convenção a equação anterior toma a forma

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (9.25)$$

Em (9.25) temos a velocidade de um ponto arbitrário de um corpo rígido executando um movimento qualquer. Se $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$, (9.25) reduz-se a $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, que, de acordo com o significado obtido para a equação (9.4), afirma que o corpo rígido está em movimento de rotação em torno de um eixo que passa por O' e que o vetor $\boldsymbol{\omega}$, definido em (9.21), é a velocidade angular de rotação em torno desse eixo, relativa ao referencial \mathcal{R}_{ef} . Desse modo, se o corpo rígido se movimenta mantendo um ponto fixo, *i.e.*, se ele tem movimento de rotação em torno desse ponto, podemos escolher a origem O' dos eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ nesse ponto e concluir que o movimento do corpo é, a cada instante, um movimento de rotação em torno de um eixo que passa pelo ponto fixo. Portanto, chegamos ao resultado de que “qualquer movimento de rotação em torno de um ponto fixo é, a cada instante, um movimento de rotação em torno de um eixo instantâneo de rotação que passa por esse ponto”. Essa é uma versão para velocidades instantâneas de um **teorema de Euler** (1776) que, originalmente, tratava de rotações finitas. Com isso, o movimento de rotação em torno de um eixo não é apenas um exemplo de rotação em torno de um ponto, como obtivemos na seção anterior; é o único tipo de rotação em torno de um ponto.

Se os eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ têm direções fixas em relação aos eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ do referencial \mathcal{R}_{ef} , temos $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, em virtude de (9.21). Nesse caso, a equação (9.25) reduz-se a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{h}}$, o que significa que todos os pontos do corpo rígido movem-se com a mesma velocidade $\dot{\mathbf{h}}$, *i.e.*, o movimento é de translação. No caso geral, a equação (9.25) afirma que “o movimento mais geral de um corpo rígido é, a cada instante a composição de um movimento de translação com um movimento de rotação em torno de um eixo”. Esse resultado é uma versão para velocidades instantâneas de um teorema de Chasles (1830), que, originalmente, tratava de translações e rotações finitas.

Agora mostraremos que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ não depende do ponto O' que foi escolhido no corpo rígido para defini-la. Vamos escolher um outro sistema de eixos $O''\mathcal{X}''_1\mathcal{X}''_2\mathcal{X}''_3$ fixo no corpo rígido, *i.e.*, um outro referencial do corpo rígido, que denotaremos por \mathcal{R}_{ef}'' . Um ponto arbitrário do corpo rígido, com vetor posição \mathbf{r} relativo a \mathcal{R}_{ef} e vetor-posição \mathbf{r}' relativo a \mathcal{R}_{ef}' , tem um vetor-posição relativo a \mathcal{R}_{ef}'' que será denotado por \mathbf{r}'' . Do mesmo modo que obtivemos (9.24) para o referencial \mathcal{R}_{ef}' , obtemos para o referencial \mathcal{R}_{ef}''

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{h}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'' , \quad (9.26)$$

onde $\mathbf{h}' = \overrightarrow{OO''}$ e $\boldsymbol{\omega}'$ é a velocidade angular de rotação do corpo rígido em torno do eixo que passa por O'' . Comparando as equações (9.24) e (9.26), obtemos

$$\frac{d\mathbf{h}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'' = \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (9.27)$$

Os vetores-posição do ponto nos três referenciais são relacionados por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \overrightarrow{O'O''} \quad (9.28)$$

e a velocidade de O'' , de acordo com a equação (9.25), é dada por

$$\frac{d\mathbf{h}'}{dt} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{O'O''} . \quad (9.29)$$

Substituindo (9.28) e (9.29) em (9.27), obtemos $\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}''$. Uma vez que \mathbf{r}'' é arbitrário, chegamos a

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} , \quad (9.30)$$

i.e., um corpo rígido tem a mesma velocidade angular de rotação em torno de qualquer um de seus pontos; por esse motivo dizemos, simplesmente, que $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do corpo rígido. Com isso, temos que em cada ponto do corpo rígido podemos considerar um eixo de rotação com a mesma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

Vamos mostrar que, por uma escolha judiciosa de um ponto no corpo rígido, podemos considerar que, a cada instante, o movimento do corpo rígido é a composição de um movimento de rotação em torno de um eixo que passa por esse ponto com um movimento de translação na direção do eixo; essa composição é conhecida como **movimento helicoidal**. Primeiramente, notemos que, de acordo com a equação (9.25), todos os pontos do corpo rígido têm a mesma velocidade na direção do eixo instantâneo de rotação, $\mathbf{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{h}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}$. Façamos a decomposição

$$\dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{h}}_{\parallel} + \dot{\mathbf{h}}_{\perp} , \quad (9.31)$$

na qual $\dot{\mathbf{h}}_{\parallel} = \overrightarrow{\text{proj}}_{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{h}}$ e $\dot{\mathbf{h}}_{\perp} = \Pi_{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{h}}$. Se $\dot{\mathbf{h}}_{\parallel} = \mathbf{0}$, nenhum ponto do corpo rígido movimenta-se na direção do eixo de rotação e

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{h}}_{\perp} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (9.32)$$

Nesse caso, existe um ponto O'' fixo no corpo, e no referencial \mathcal{R}_{ef} , com a propriedade de que o movimento do corpo é uma pura rotação em torno de O'' . De fato, se \mathbf{r}'' é o vetor de posição de um ponto qualquer do corpo rígido, em relação aos eixos $O''\mathcal{X}_1''\mathcal{X}_2''\mathcal{X}_3''$, temos $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{r}''$, onde $\boldsymbol{\xi} := \overrightarrow{O'O''}$, e obtemos de (9.32)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{h}}_{\perp} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'' . \quad (9.33)$$

Se existir algum ponto O'' , *i.e.*, algum $\boldsymbol{\xi}$, tal que $\dot{\mathbf{h}}_{\perp} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, teremos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'' \quad (9.34)$$

e fica demonstrado que o movimento do corpo rígido é de pura rotação em torno de um eixo que passa por O'' . Como pode ser facilmente verificado, um ξ que leva à equação (9.34) (há uma infinidade deles) é dado por

$$\xi = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{h}}_{\perp}}{\omega^2}. \quad (9.35)$$

Agora, voltemos à situação geral em que \mathbf{h}_{\parallel} não é necessariamente nulo. Temos, então, com a decomposição (9.31) em (9.25),

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{h}}_{\parallel} + \dot{\mathbf{h}}_{\perp} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (9.36)$$

Exatamente como no caso em que $\mathbf{h}_{\parallel} = \mathbf{0}$, podemos usar o vetor (9.35) para transferir a origem de O' para O'' e eliminar $\dot{\mathbf{h}}_{\perp}$ em (9.36). Obtemos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{h}}'_{\parallel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'', \quad (9.37)$$

onde também usamos que O'' , como qualquer outro ponto, tem a mesma velocidade que O' na direção do eixo de rotação. A fórmula (9.37) mostra que o movimento mais geral de um corpo rígido é a composição de uma rotação em torno de um eixo com uma translação ao longo desse eixo, *i.e.*, o movimento mais geral é um movimento helicoidal. A quantidade $2\pi\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}/\omega^2$ é chamada **paço instantâneo** do movimento helicoidal. Quando as velocidades translacional \mathbf{v} e angular $\boldsymbol{\omega}$ são constantes no movimento helicoidal, o passo é a translação sofrida pelo corpo durante uma rotação completa.

Temos usado o referencial $\mathcal{R}ef'$ do corpo rígido para localizar as próprias partículas do corpo rígido ou pontos fixos em relação a ele, *i.e.*, pontos do corpo rígido estendido. Agora, consideremos um vetor qualquer e as suas taxas de variação relativas a dois referenciais $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$. De um modo geral, a taxa instantânea de variação de um vetor em relação a um referencial qualquer é a derivada do vetor com os unitários do referencial considerados como constantes. Para um vetor qualquer \mathbf{A} temos

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = A'_i \mathbf{e}'_i. \quad (9.38)$$

onde A_1, A_2 e A_3 são as componentes de \mathbf{A} na base de $\mathcal{R}ef$ e A'_1, A'_2 e A'_3 , suas componentes na base de $\mathcal{R}ef'$. Portanto, as taxas instantâneas de variação de \mathbf{A} relativas a $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$ são, respectivamente,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_i}{dt} \mathbf{e}_i, \quad \frac{d'\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA'_i}{dt} \mathbf{e}'_i, \quad (9.39)$$

A relação entre as duas taxas em (9.39) é dada por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(A'_i \mathbf{e}'_i \right) = \frac{dA'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + A'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt}. \quad (9.40)$$

Usando (9.39) e (9.18) nessa expressão, obtemos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}. \quad (9.41)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é, naturalmente, a velocidade de rotação de $\mathcal{R}ef'$ em relação a $\mathcal{R}ef$. Se tomarmos \mathbf{A} como sendo a posição \mathbf{r}' de um ponto fixo no referencial $\mathcal{R}ef'$ reobtemos (9.19).

Há três conseqüências imediatas de (9.41). A primeira é a igualdade

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}, \quad (9.42)$$

i.e., a taxa temporal de variação da velocidade angular do corpo rígido é a mesma em relação a $\mathcal{R}ef$ e em relação ao próprio referencial $\mathcal{R}ef'$ do corpo rígido. A segunda é que, se a velocidade angular de um referencial $\mathcal{R}ef'$ em relação a um referencial $\mathcal{R}ef$ é $\boldsymbol{\omega}$, então a velocidade angular de rotação de $\mathcal{R}ef$ em relação a $\mathcal{R}ef'$ é $-\boldsymbol{\omega}$. A terceira é que, se a velocidade angular do corpo rígido em relação a um referencial $\mathcal{R}ef'$ é $\boldsymbol{\omega}_2$ e a velocidade angular de $\mathcal{R}ef'$ em relação a um referencial $\mathcal{R}ef$ é $\boldsymbol{\omega}_1$, então a velocidade $\boldsymbol{\omega}$ do corpo rígido em relação a $\mathcal{R}ef$ é

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2. \quad (9.43)$$

Essa igualdade determina em que sentido podemos dizer que velocidade angular é uma grandeza aditiva.

9.3 Referenciais não-inerciais

Como aplicação imediata da cinemática de um corpo rígido, estudada na seção anterior, consideremos um referencial $\mathcal{R}ef'$ em movimento genérico em relação a um referencial $\mathcal{R}ef$. Para os vetores-posição \mathbf{r} e \mathbf{r}' de uma partícula, relativos a $\mathcal{R}ef$ e $\mathcal{R}ef'$, respectivamente, temos

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{r}', \quad (9.44)$$

onde \mathbf{h} denota, como na seção anterior, a posição da origem de $\mathcal{R}ef'$ relativa a $\mathcal{R}ef$. Por definição, a velocidade da partícula em relação a $\mathcal{R}ef$ é $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ e em relação a $\mathcal{R}ef'$, $\mathbf{v}' = d'\mathbf{r}'/dt$. A relação entre essas velocidades é obtida usando-se (9.41). Temos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (9.45)$$

i.e.,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (9.46)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular de $\mathcal{R}ef'$ em relação a $\mathcal{R}ef$. Analogamente, temos, para as respectivas acelerações,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \frac{d^2\mathbf{h}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}', \quad (9.47)$$

onde $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ é a aceleração da partícula relativa a $\mathcal{R}ef$ e $\mathbf{a}' = d'^2\mathbf{r}'/dt^2$, a aceleração da mesma partícula relativa a $\mathcal{R}ef'$.

Em (9.46), a velocidade da partícula em relação a $\mathcal{R}ef$ é sua velocidade em relação a $\mathcal{R}ef'$ mais as velocidades devidas à translação e à rotação de $\mathcal{R}ef'$ em relação a $\mathcal{R}ef$,

respectivamente, $d\mathbf{h}/dt$ e $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Em (9.47), a aceleração da partícula em relação a $\mathcal{R}ef$ é sua aceleração em relação a $\mathcal{R}ef'$ mais acelerações devidas à translação e à rotação de $\mathcal{R}ef'$ em relação a $\mathcal{R}ef$. A aceleração $d^2\mathbf{h}/dt^2$ é a aceleração de translação de $\mathcal{R}ef'$ em relação a $\mathcal{R}ef$; é a única que se adiciona a \mathbf{a}' se não há rotação, *i.e.*, se $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Essa aceleração devida à translação do referencial $\mathcal{R}ef'$ é algumas vezes chamada **aceleração de Einstein**. Passemos às acelerações devidas à rotação de $\mathcal{R}ef'$. Para a aceleração bilinear na velocidade angular, temos

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\perp}) = -\omega^2 \mathbf{r}'_{\perp}, \quad (9.48)$$

i.e., a aceleração $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ aponta para o eixo instantâneo de rotação e, por isso, é chamada **aceleração centrípeta**. A aceleração linear na velocidade, $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, existe somente quando há movimento da partícula relativo ao referencial em rotação $\mathcal{R}ef'$, *i.e.*, quando $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$. Chamamos $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ **aceleração de Coriolis**. Finalmente, temos a aceleração $(d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}$, linear na derivada temporal da velocidade angular de rotação do referencial $\mathcal{R}ef'$. Essa aceleração é, algumas vezes, chamada **aceleração de Euler**. Em resumo, “a aceleração de uma partícula é igual à soma de sua aceleração relativa a um referencial móvel com a aceleração de Einstein, devida à translação do referencial móvel, e com as acelerações centrípeta, de Coriolis e de Euler, devidas à rotação do referencial móvel”. Esse resultado é conhecido como **teorema de Coriolis**.

O teorema de Coriolis permite que um observador em um referencial não-inercial $\mathcal{R}ef'$ determine os movimentos possíveis de uma partícula a partir do conhecimento das forças que agem sobre ela e do conhecimento do próprio movimento de $\mathcal{R}ef'$ em relação a um referencial inercial $\mathcal{R}ef$. Supondo, então, que $\mathcal{R}ef$ seja inercial, podemos escrever a partir do teorema de Coriolis (9.47) e da Segunda Lei de Newton,

$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{h}}{dt^2} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}'}{dt} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}', \quad (9.49)$$

onde \mathbf{F} é a força total sobre a partícula. Obtido esse resultado, podemos afirmar que, conhecendo-se a força total \mathbf{F} sobre a partícula, a aceleração $d^2\mathbf{h}/dt^2$ de translação de $\mathcal{R}ef'$ em relação a $\mathcal{R}ef$ e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ de rotação de $\mathcal{R}ef'$ em relação a $\mathcal{R}ef$, os movimentos possíveis da partícula em relação a $\mathcal{R}ef'$ são determinados pela equação diferencial (9.49). Essa é a **equação de movimento da partícula no referencial não-inercial $\mathcal{R}ef'$** . Devemos manter em mente que essa equação de movimento não permite determinar os movimentos possíveis da partícula a partir somente das forças que agem sobre ela; é também necessário conhecer o movimento do referencial não-inercial relativo ao inercial. Os termos que se adicionam a \mathbf{F} no membro direito de (9.49), evidências de que $\mathcal{R}ef'$ não é um referencial inercial, são algumas vezes chamados **forças fictícias** ou **forças inerciais**, embora não sejam de modo algum forças no sentido em que temos usado essa palavra. De fato, até o momento, entendemos por força sobre uma partícula a ação aceleradora exercidas sobre ela pelos corpo de sua vizinhança. Já o que chamamos de forças fictícias, ou inerciais, não são exercidas por nenhum corpo e podem existir mesmo sobre uma partícula isolada; elas são um efeito das acelerações que o referencial móvel tem em relação ao inercial.

As forças fictícias no membro direito de (9.49) recebem denominações especiais. Chamamos $-md^2\mathbf{h}/dt^2$, **força de Einstein**, $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$, **força centrífuga**,

$-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, **força de Coriolis** e $-m(d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}'$, **força de Euler**. A força de Einstein, devida à translação do referencial não inercial, não depende da posição ou da velocidade da partícula, é uma força uniforme, *i.e.*, tem, a cada instante, o mesmo valor em todos os pontos do espaço. Essa força dota a partícula de uma aceleração relativa ao referencial móvel que não depende da posição ou da velocidade da partícula e que, obviamente, tem mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto à aceleração de translação do referencial móvel em relação ao inercial. As demais forças fictícias, devidas à rotação do referencial não inercial, dependem da posição ou velocidade da partícula. A força centrífuga faz com que, no referencial em rotação, a partícula tenha uma aceleração ao longo da reta que a une perpendicularmente ao eixo de rotação, no sentido que foge desse eixo. As forças de Coriolis e de Euler tem seus efeitos mais simplesmente compreendidos por meio de exemplos particulares.

A teoria dos referenciais não-inerciais é de interesse imediato porque a Terra é nosso referencial natural e, a rigor, não-inercial. Em muitos problemas é uma boa aproximação tomar a Terra como referencial inercial, como temos feito. Mas há outros problemas nos quais é absolutamente necessário considerar as acelerações que a Terra apresenta em relação ao referencial inercial copernicano. Um exemplo desse tipo de problema é dado pelo pêndulo de Foucault e um outro pelo fenômeno meteorológico dos ciclones.

9.4 Operador de inércia

O momento angular \mathbf{L}_Q de um sistema de partículas em relação a um ponto-base Q é dado por

$$\mathbf{L}_Q = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_{kQ} \times \dot{\mathbf{r}}_{kQ}, \quad (9.50)$$

onde \mathbf{r}_{kQ} é o vetor-posição da k -ésima partícula relativo ao ponto-base Q , $\mathbf{r}_{kQ} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q$. Supondo que o sistema seja um corpo rígido e que o ponto Q esteja fixo no corpo, temos, em virtude de (9.25), $\dot{\mathbf{r}}_k = \dot{\mathbf{r}}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{kQ}$ e, portanto

$$\dot{\mathbf{r}}_{kQ} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{kQ}. \quad (9.51)$$

Substituindo essa expressão em (9.50), obtemos

$$\mathbf{L}_Q = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_{kQ} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{kQ}). \quad (9.52)$$

Dado um corpo rígido em um ponto Q arbitrário, definimos a função

$$\begin{aligned} I_Q : \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ &: \mathbf{x} \longrightarrow I_Q(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9.53)$$

por meio de

$$I_Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_{kQ} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_{kQ}). \quad (9.54)$$

Se o ponto Q estiver fixo no corpo, a equação (9.52) garante que a função I_Q mapeia o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ no vetor momento angular \mathbf{L}_Q ,

$$\mathbf{L}_Q = I_Q(\boldsymbol{\omega}) . \quad (9.55)$$

Da definição (9.54), obtém-se, imediatamente, que a função I_Q é linear, ou seja, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$I_Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = I_Q(\mathbf{x}) + I_Q(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad I_Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda I_Q(\mathbf{x}) . \quad (9.56)$$

Portanto, I_Q é um operador linear, que chamamos **operador de inércia** do corpo rígido, relativo a Q . É consequência imediata de sua definição (9.54) que o operador de inércia de um corpo rígido é a soma dos operadores de inércia de suas partes, todos em relação ao mesmo ponto. Notemos que é possível considerar o operador de inércia de uma única partícula, tomando-se $N = 1$ em (9.54). O operador de inércia relativo a Q de uma partícula de massa m e vetor-posição \mathbf{r} é dado por $I_Q(\mathbf{x}) = m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times [\mathbf{x} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)]$. O operador de inércia goza a importante propriedade de ser simétrico, *i.e.*, para quaisquer vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} ,

$$\mathbf{x} \cdot I_Q(\mathbf{y}) = I_Q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} . \quad (9.57)$$

Para qualquer corpo rígido, tem particular importância o seu operador de inércia relativo ao centro de massa. Representando por \mathbf{r}'_k o vetor-posição relativo ao centro de massa da k -ésima partícula do sistema, temos

$$I_{cm}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}'_k \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}'_k) . \quad (9.58)$$

Conhecendo-se o operador de inércia em relação ao centro de massa, é fácil obter o operador de inércia em relação a um ponto arbitrário Q . Com efeito, se \mathbf{R}_Q é a posição do centro de massa em relação a Q , ou seja, $\mathbf{R}_Q = \mathbf{R} - \mathbf{r}_Q$, temos $\mathbf{r}_{kQ} = \mathbf{r}'_k + \mathbf{R}_Q$. Substituindo essa igualdade em (9.54) e usando (9.58), obtemos

$$I_Q(\mathbf{x}) = I_{cm}(\mathbf{x}) + M \mathbf{R}_Q \times (\mathbf{x} \times \mathbf{R}_Q) , \quad (9.59)$$

onde M é a massa total do corpo rígido. O termo $M \mathbf{R}_Q \times (\mathbf{x} \times \mathbf{R}_Q)$ define um operador de inércia de uma partícula fictícia com massa igual à massa total do corpo e com a posição do seu centro de massa. Esse operador pode ser chamado **operador de inércia do centro de massa**, relativo ao ponto Q . Representando-o por I_Q^{cm} , temos

$$I_Q^{cm}(\mathbf{x}) = M \mathbf{r}_Q \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_Q) , \quad (9.60)$$

e podemos escrever (9.59) na forma

$$I_Q = I_{cm} + I_Q^{cm} . \quad (9.61)$$

Esse é o **teorema de Steiner**: “o operador de inércia relativo a um dado ponto é a soma do operador de inércia relativo ao centro de massa com o operador de inércia do centro de massa relativo ao ponto dado”.

Vimos que o operador de inércia associa a cada velocidade angular de um corpo rígido o seu momento angular. Ele também permite relacionar a energia cinética do corpo rígido com sua velocidade angular. Dado um ponto Q fixo no corpo rígido, podemos escrever para a velocidade de sua k -ésima partícula $\dot{\mathbf{r}}_k = \dot{\mathbf{r}}_{kQ} + \dot{\mathbf{r}}_Q$. Usando essa igualdade na expressão da energia cinética do corpo rígido,

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2, \quad (9.62)$$

obtemos

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_{kQ}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_Q^2 + \dot{\mathbf{r}}_Q \cdot \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{r}}_{kQ}. \quad (9.63)$$

Estando Q fixo no corpo, podemos usar no primeiro termo do membro direito dessa igualdade a expressão $\dot{\mathbf{r}}_{kQ} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{kQ}$, obtida em (9.51). Com isso, obtemos

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_Q(\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_Q^2 + \dot{\mathbf{r}}_Q \cdot \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{r}}_{kQ}. \quad (9.64)$$

Há duas situações interessantes em que aplicamos essa fórmula. Na primeira, o ponto Q está fixo não somente no corpo como também no referencial inercial em uso. Nesse caso, o corpo rígido está em movimento de pura rotação em torno do ponto Q e (9.64) reduz-se a

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_Q(\boldsymbol{\omega}), \quad (9.65)$$

pois $\dot{\mathbf{r}}_Q = \mathbf{0}$. Graças a esse resultado, identificamos a expressão quadrática na velocidade angular, $\boldsymbol{\omega} \cdot I_Q(\boldsymbol{\omega})/2$, como sendo a energia cinética de rotação do corpo rígido em torno do ponto Q . A segunda situação de interesse é aquela em que o ponto Q é o centro de massa, *i.e.*, $Q = cm$, $\mathbf{r}_Q = \mathbf{R}$ e $\mathbf{r}_{kQ} = \mathbf{r}'_k$. Nesse caso, o último somatório na equação (9.64) é nulo, $\sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{r}}'_k = \mathbf{0}$, de modo que ela assume a forma

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{cm}(\boldsymbol{\omega}). \quad (9.66)$$

Nessa fórmula, a expressão quadrática na velocidade angular $\boldsymbol{\omega} \cdot I_{cm}(\boldsymbol{\omega})/2$, é denominada **energia cinética de rotação do corpo rígido em torno de seu centro de massa**. A energia cinética do centro de massa $M\dot{\mathbf{R}}^2/2$ é denominada **energia cinética de translação do corpo rígido**. Daí descrevermos (9.66) dizendo que “a energia cinética do corpo rígido é igual à soma de sua energia cinética de translação com sua energia cinética de rotação em torno de seu centro de massa”. A energia cinética de rotação em torno do centro de massa,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{cm}(\boldsymbol{\omega}), \quad (9.67)$$

é também chamada **energia cinética do movimento relativo ao centro de massa**. Entendemos por movimento relativo ao centro de massa o movimento relativo ao que chamamos **referencial do centro de massa**, qual seja, um referencial

com origem no centro de massa e com eixos que não possuem velocidade angular de rotação relativamente ao referencial inercial em uso. O referencial do centro de massa pode, perfeitamente, não ser inercial, devido à sua aceleração translacional em relação ao inercial. Contudo, por hipótese, ele não tem movimento de rotação em relação ao inercial. Nesse contexto, o referencial inercial costuma ser chamado **referencial do laboratório**.

Usando o operador de inércia I_Q do corpo rígido, relativo ao ponto Q , podemos definir a função real de duas variáveis vetoriais

$$\begin{aligned} B_Q : \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longrightarrow B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (9.68)$$

por meio de

$$B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot I_Q(\mathbf{y}). \quad (9.69)$$

Tal função é linear tanto na primeira variável,

$$B_Q(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = B_Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + B_Q(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad B_Q(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (9.70)$$

($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in \vec{\mathcal{E}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$), como na segunda,

$$B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \quad \text{e} \quad B_Q(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (9.71)$$

($\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \vec{\mathcal{E}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$). Uma tal função é chamada **forma bilinear**. Forma, porque transforma vetores em número e, bilinear, porque depende de duas variáveis vetoriais e é linear em ambas. Formas bilineares também são conhecidas como **tensores de segunda ordem**. Usando o tensor B_Q podemos escrever a energia cinética de rotação (9.65) como

$$T = B_Q(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}). \quad (9.72)$$

Doravante, estaremos omitindo o sub-índice Q do símbolos do operador de inércia, das posições e velocidades, exceto quando houver perigo de mal-entendidos.

Agora, passaremos ao estudo dos elementos da matriz do operador de inércia I em uma base ortonormal arbitrária ($\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$). Será conveniente trabalhar com o (9.54) reescrita na forma

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N m_k [r_k^2 \mathbf{x} - (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{x}) \mathbf{r}_k]. \quad (9.73)$$

Os elementos de matriz I_{ij} do operador I na base ($\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$) são, por definição, dados pela igualdade $I(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^3 I_{ij} \mathbf{u}_i$. Com o auxílio de (9.73), obtemos

$$I(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N m_k [r_k^2 \delta_{ij} - (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{u}_i)(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{u}_j)] \mathbf{u}_i,$$

de modo que

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k [r_k^2 \delta_{ij} - (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{u}_i)(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{u}_j)] \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (9.74)$$

Esses são os elementos da matriz do operador de inércia I , que chamamos **matriz de inércia do corpo rígido** na base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Em (9.74) está manifesto que a matriz de inércia é simétrica,

$$I_{ij} = I_{ji} , \quad (9.75)$$

uma propriedade que pode ser obtida da ortonormalidade da base usada e do fato do operador I ser simétrico, conforme estabelecido em (9.57).

Os elementos diagonais da matriz de inércia (9.74) são

$$I_{ii} = \sum_{k=1}^N m_k [r_k^2 - (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{u}_i)^2] \quad (i = 1, 2, 3) , \quad (9.76)$$

onde $r_k^2 - (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{u}_i)^2$ é o quadrado da distância da massa m_k ao eixo do unitário \mathbf{u}_i . Definimos **momento de inércia** de um corpo em relação a um eixo como sendo a soma, para todas as partículas do corpo, do produto de suas massas pelo quadrado de suas respectivas distâncias ao eixo. Vemos, então, em (9.76), que o elemento diagonal I_{ii} da matriz de inércia é o momento de inércia do corpo rígido em relação ao eixo do unitário \mathbf{u}_i . É evidente, pela própria expressão (9.76) dos momentos de inércia, que eles medem o afastamento que as massas do corpo têm dos eixos considerados. Para os elementos extradiagonais em (9.74), *i.e.*, com $i \neq j$, temos

$$I_{ij} = - \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{u}_i)(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{u}_j) \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) . \quad (9.77)$$

O elemento I_{ij} , com $i \neq j$, é chamado **produto de inércia** do corpo rígido em relação ao par de eixos dos unitários \mathbf{u}_i e \mathbf{u}_j . Se o plano ortogonal a \mathbf{u}_i e que passa pelo ponto base Q (lembremo-nos que estamos usando I como abreviação de I_Q) for um plano de simetria do corpo rígido, então $I_{ij} = 0$; analogamente, também se o plano ortogonal a \mathbf{u}_j e que passa pelo ponto Q for um plano de simetria do corpo rígido, $I_{ij} = 0$. Os produtos de inércia medem, pois, a ausência dessa simetria do corpo rígido em consideração. Em suma, a matriz de inércia é formada por três momentos de inércia em sua diagonal e por seis produtos de inércia fora da diagonal; há apenas três produtos de inércia distintos, pois a matriz é simétrica. Os momentos de inércia medem o afastamentos em relação aos eixos das massas do corpo rígido e os produtos de inércia, os desvios de simetria que o corpo rígido apresenta em relação aos planos desses eixos. Momentos e produtos de inércia também têm propriedades dinâmicas importantes, como veremos posteriormente.

O teorema de Steiner pode ser expresso em termos de momentos e produtos de inércia. De (9.61), obtemos

$$I_{ij} = I'_{ij} + M (R^2 \delta_{ij} - X_i X_j) , \quad (9.78)$$

onde I' denota o mesmo que I_{cm} , o operador de inércia em relação ao centro de massa, e X_1, X_2 e X_3 denotam as coordenadas do centro de massa. As matrizes obtidas em (9.78), para os operadores I, I' e I^{cm} em (9.61), são todas na mesma base e, conseqüentemente, os eixos em relação aos quais são considerados os momentos e produtos de inércia de I, I' e I^{cm} são paralelos dois a dois. Por isso, o resultado

(9.78) também é conhecido como **teorema dos eixos paralelos** para momentos e produtos de inércia.

Agora, consideremos o caso particular em que o corpo rígido é plano e tomemos um sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ com $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ no plano do corpo. Neste caso, obtemos por cálculo direto

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} . \quad (9.79)$$

Esse resultado é conhecido como **teorema dos eixos perpendiculares** para momentos de inércia.

Dado o momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo, a distância até o eixo na qual podemos concentrar toda a massa do corpo, sem alterar seu momento de inércia, é chamada **raio de giração** do corpo em relação ao eixo considerado. Se I_{ii} é o momento de inércia de um corpo rígido de massa M em relação ao i -ésimo eixo, seu raio de giração relativo a esse eixo é, portanto, o comprimento k_{ii} dado por

$$I_{ii} = M k_{ii}^2 . \quad (9.80)$$

Neste capítulo, temos considerado o corpo rígido como uma distribuição discreta de matéria, constituída por N partículas. Contudo, as definições usadas e os resultados obtidos podem ser adaptados, facilmente, às situações em que devemos considerar o corpo rígido como uma distribuição contínua de matéria. Se, por exemplo, o corpo rígido é dado pela distribuição volumar de massa

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ &: \mathbf{r} \longmapsto \rho(\mathbf{r}) , \end{aligned} \quad (9.81)$$

na qual \mathcal{M} é a região ocupada pelo corpo, a definição de seu operador de inércia I é dada por

$$I(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{M}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} , \quad (9.82)$$

no lugar da expressão (9.54) usada no caso de distribuição discreta, e os elementos da matriz de inércia, por

$$I_{ij} = \int_{\mathcal{M}} \rho(\mathbf{r}) (r^2\delta_{ij} - x_i x_j) d^3\mathbf{r} , \quad (9.83)$$

em substituição à expressão (9.74) associada à distribuição discreta. No caso de distribuições superficiais e lineares, e de outros conceitos associados ao corpo rígido, as adaptações a serem feitas também são óbvias.

9.5 Diagonalização do operador de inércia

Existe uma base ortonormal de vetores na qual é diagonal a matriz do operador de inércia de um corpo rígido qualquer. Essa propriedade é consequência do operador de inércia ser simétrico e tem profundas implicações na dinâmica do corpo rígido.

Sendo simétrico, o operador de inércia tem autovalores reais, digamos I_1 , I_2 e I_3 , e autovetores que formam uma base ortonormal $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$,

$$I(\mathbf{e}_i) = I_i \mathbf{e}_i \quad (I_i \in \mathbb{R}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9.84)$$

onde

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9.85)$$

Notemos que em (9.84), como no resto desta seção, não há soma implícita nos índices repetidos.

Os eixos da base \mathcal{B} de autovetores são chamados **eixos principais de inércia** e a própria base pode ser chamada **base principal de inércia**. Obviamente, nessa base, a matriz do operador de inércia I é diagonal e seus elementos diagonais são os autovalores I_1 , I_2 e I_3 . Naturalmente, esses autovalores são os momentos de inércia em relação aos eixos principais dos unitários \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , respectivamente. Os momentos de inércia I_1 , I_2 e I_3 são chamados **momentos principais de inércia** do corpo rígido em consideração.

Usando os eixos principais de inércia (9.55) assume a forma

$$\mathbf{L} = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (9.86)$$

e (9.65) pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2. \quad (9.87)$$

Dessas duas últimas fórmulas obtemos um significado dinâmico para os momentos de inércia. De acordo com (9.86), se um corpo rígido tem um dado momento angular, quanto maior for o momento de inércia relativo a um eixo principal, menor será a componente da velocidade angular do corpo rígido ao longo desse eixo. De acordo com (9.87), dada a energia cinética do corpo, quanto maiores forem os momentos de inércia relativos aos eixos principais, menor será a velocidade angular do corpo. Fazendo uma analogia com a massa do corpo rígido, que descreve sua inércia no caso de translações, podemos considerar que os momentos de inércia descrevem a inércia do corpo no caso de rotações. Essa propriedade fica rigorosamente justificada quando consideramos as equações de movimento do corpo rígido em rotação.

Os eixos principais de inércia estão relacionados com as simetrias do corpo rígido. Não é difícil demonstrar as seguintes propriedades: **(i)** qualquer plano de simetria do corpo é perpendicular a um eixo principal; **(ii)** qualquer eixo de simetria do corpo é um eixo principal, sendo que, nesse caso, os outros dois eixos têm momentos de inércia iguais e podem ser escolhidos em quaisquer direções que respeitem a ortogonalidade do sistema de eixos. Naturalmente, também podemos afirmar que o centro de massa do corpo rígido está em qualquer de seus planos ou eixos de simetria.

Para diagonalizar um dado operador de inércia I procedemos da maneira usual. Procuramos soluções da equação de autovalores para I ,

$$I \boldsymbol{\xi} = \lambda \boldsymbol{\xi} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}), \quad (9.88)$$

que é equivalente a

$$(I - \lambda \text{id})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}), \quad (9.89)$$

onde id é o operador identidade no espaço vetorial $\vec{\mathcal{E}}$. Sua matriz em qualquer base é a matriz unidade $\mathbb{1}$. Não costuma causar confusão representar, tanto o operador identidade, quanto a matriz unidade, simplesmente por 1.

Sendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, torna-se necessário que o operador $(I - \lambda \text{id})$ não possua inverso, o que é equivalente a

$$\det(I - \lambda \text{id}) = 0. \quad (9.90)$$

A expressão $\det(I - \lambda \text{id})$ é um polinômio na variável λ , dito **polinômio característico** do operador I . A equação (9.90) é chamada **equação característica** do operador I ; suas raízes são os autovalores do operador I .

Para calcular o determinante (9.90) e resolver a equação (9.88) vamos usar matrizes em uma base ortonormal $\mathcal{B}_T = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ que chamaremos **base de trabalho**. Nosso objetivo, naturalmente, é encontrar uma base principal de inércia $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Denotando por $[I]$ a matriz do operador de inércia na base de trabalho, podemos escrever a equação característica (9.90) como

$$\det([I] - \lambda \mathbb{1}) = 0. \quad (9.91)$$

Denotando por I_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) os elementos da matriz do operador de inércia na base de trabalho, Podemos escrever a equação (9.88) como

$$\sum_{j=1}^3 (I_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \xi_j = 0, \quad (9.92)$$

onde ξ_1, ξ_2 e ξ_3 são as componentes do vetor $\boldsymbol{\xi}$ na base de trabalho \mathcal{B}_T . Denotando por $[\boldsymbol{\xi}]$ a matriz coluna desse vetor na base de trabalho \mathcal{B}_T , podemos reescrever (9.92) como

$$[I][\boldsymbol{\xi}] = \lambda [\boldsymbol{\xi}], \quad (9.93)$$

i.e.,

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}. \quad (9.94)$$

Essa é a forma matricial das equações (9.92), que formam um sistema homogêneo. Ele tem solução não-trivial graças à condição (9.91), que agora escrevemos como

$$\det \begin{bmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (9.95)$$

Essa equação possui três raízes para λ , que são reais porque I é simétrico. As três raízes são os momentos principais de inércia. Cada raiz, substituída em (9.94) determina um sistema de equações homogêneas cuja solução é um autovetor de componentes ξ_1, ξ_2 e ξ_3 . Se as três raízes forem distintas, temos três sistemas de equações da

forma (9.94), que fornecerão como soluções três autovetores $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ e $\xi^{(3)}$. Eles são mutuamente ortogonais porque I é simétrico. Se as raízes não forem distintas, teremos menos do que três sistemas de equações, mas nesse caso os sistemas disponíveis também terão soluções suficientes para determinar três vetores ortogonais $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ e $\xi^{(3)}$. Uma base principal será dada, finalmente, por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\xi^{(1)}}{|\xi^{(1)}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\xi^{(2)}}{|\xi^{(2)}|} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\xi^{(3)}}{|\xi^{(3)}|}. \quad (9.96)$$

A base principal ortonormal é única, exceto pela liberdade de inverter o sentido de seus vetores ou de alterar a ordem em que aparecem na base.

9.6 Equações de Euler

Consideremos o movimento de um corpo rígido em relação a um referencial inercial \mathcal{R}_f com sistema de eixos ortogonais $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$. Vamos fixar no corpo rígido um sistema de eixos ortogonais $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ cuja origem é o centro de massa ou, se existir, um ponto do corpo fixo em relação ao referencial inercial. Podemos escolher os eixos fixos no corpo como sendo os seus eixos principais de inércia, mas não é necessário, por hora, fazer essa suposição. Tomando O' como ponto base do momento angular \mathbf{L} do corpo e do torque externo total \mathbf{N}^{ex} que age sobre ele, temos a equação (9.3),

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{N}^{ex}. \quad (9.97)$$

Tomando-se o operador de inércia I do corpo rígido também em relação ao ponto O' , temos a relação (9.55), $\mathbf{L} = I(\boldsymbol{\omega})$, entre o momento angular do corpo rígido e sua velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Usando essa relação em (9.97), obtemos

$$\frac{d}{dt}I(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}^{ex}. \quad (9.98)$$

Agora, nosso objetivo é transferir para a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ a derivada temporal que, nessa equação, age sobre $I(\boldsymbol{\omega})$. Essa transferência requer cuidado porque a derivada temporal é relativa ao referencial inercial, em relação ao qual há movimento do corpo rígido. De acordo com a definição (9.54) de operador de inércia, aqui relativo ao ponto O' fixo no corpo, temos

$$I(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}'_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_k), \quad (9.99)$$

onde, naturalmente, \mathbf{r}'_k é o vetor-posição da k -ésima partícula do corpo rígido em relação ao ponto O' . Sabemos que a derivada temporal relativa ao referencial inercial, $d\mathbf{r}'_k/dt$, pode não ser nula, mas para a derivada relativa ao referencial do corpo rígido temos $d'\mathbf{r}'_k/dt = \mathbf{0}$. Essas propriedades aplicadas à expressão (9.99) nos permitem concluir que $d'I(\boldsymbol{\omega})/dt = I(d'\boldsymbol{\omega}/dt)$, embora não possamos garantir a igualdade

$dI(\boldsymbol{\omega})/dt = I(d\boldsymbol{\omega}/dt)$. Dito isso, podemos usar a relação (9.41) entre as derivadas relativas aos dois referenciais e escrever para o membro esquerdo da equação (9.98),

$$\frac{d}{dt}I(\boldsymbol{\omega}) = \frac{d'}{dt}I(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega}) = I\left(\frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) + \boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega}) \quad (9.100)$$

e, com o auxílio da igualdade (9.42), $d\boldsymbol{\omega}/dt = d'\boldsymbol{\omega}/dt$, chegamos ao resultado

$$\frac{d}{dt}I(\boldsymbol{\omega}) = I\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) + \boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega}), \quad (9.101)$$

que é o resultado procurado. Usando-o em (9.98), obtemos

$$I\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) + \boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}^{ex}. \quad (9.102)$$

Essa é a **equação vetorial de Euler** para o movimento do corpo rígido, a equação fundamental da dinâmica do corpo rígido.

Na ausência de forças externas e, portanto, de torques externos, a rotação do corpo rígido é dita livre. De acordo com a equação de Euler (9.102), uma rotação livre não é, necessariamente, uma rotação com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ constante, *i.e.*, uma rotação uniforme em torno de um eixo com direção fixa. De fato, se não há torque externo, mas o termo $\boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega})$ da equação de Euler (9.102) não é nulo, o outro termo $I(d\boldsymbol{\omega}/dt)$ não pode ser nulo, ou seja, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ não pode ser constante. Essa propriedade do movimento de rotação contrasta com o que ocorre na translação que, quando livre, *i.e.*, na ausência de força externa, é necessariamente uma translação uniforme ao longo de uma direção fixa. A ocorrência de rotação uniforme em torno de eixo com direção fixa é equivalente a $d\boldsymbol{\omega}/dt = \mathbf{0}$ que, pela equação de Euler, ocorre se, e somente se, $\mathbf{N}^{ex} = \boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega})$. Desse modo, a rotação uniforme em torno de eixo com direção fixa ocorre na ausência de torque externo se, e somente se, $\boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$, o que é equivalente a dizer que $I(\boldsymbol{\omega})$ tem a direção de $\boldsymbol{\omega}$, o que é, por sua vez, equivalente a dizer que a rotação ocorre em torno de algum eixo principal de inércia. Em contrapartida, para manter $\boldsymbol{\omega}$ constante ao longo de um eixo que não seja principal, deve haver um torque externo, a cada instante igual a $\boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega})$.

De acordo com (9.65) e (9.67), a energia cinética de rotação de um corpo rígido em torno de um ponto fixo ou de seu centro de massa é

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I(\boldsymbol{\omega}), \quad (9.103)$$

onde I é o respectivo operador de inércia relativo a um desses pontos. Tomando a derivada temporal dessa expressão da energia cinética e usando a equação (9.98), obtemos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot I(\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}^{ex}.$$

Usando nessa expressão a simetria (9.57) do operador de inércia I para transferí-lo da velocidade angular para a derivada da velocidade angular e, em seguida, a equação

de Euler (9.102), chegamos a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left\{ \mathbf{N}^{ex} - \boldsymbol{\omega} \times I(\boldsymbol{\omega}) \right\} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}^{ex}, \quad (9.104)$$

ou seja,

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{N}^{ex} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (9.105)$$

Esse é o teorema do trabalho e energia cinética para o movimento de rotação do corpo rígido. No caso em que T é a energia cinética total, de translação e rotação, conforme dada em (9.66), obtemos

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}^{ex} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{N}^{ex} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (9.106)$$

Agora, consideremos o sistema de eixos $O' \mathcal{X}'_1 \mathcal{X}'_2 \mathcal{X}'_3$, fixo no corpo rígido, como sendo o sistema de eixos principais de inércia, com sua base principal de inércia $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. Decompondo a equação vetorial de Euler (9.102) ao longo desses eixos principais, obtemos as três equações

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= N_1^{ex}, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= N_2^{ex} \quad \text{e} \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= N_3^{ex}. \end{aligned} \quad (9.107)$$

nas quais usamos os símbolos I , ω e N ao invés de I' , ω' e N' , respectivamente, para não sobrecarregar a notação, embora deva ficar claro que as componentes em (9.107) são relativas ao sistema de eixos principais $O' \mathcal{X}'_1 \mathcal{X}'_2 \mathcal{X}'_3$, que é fixo no corpo. Doravante, usaremos essa notação mais leve sempre que o contexto evitar perigo de confusão. Chamamos as equações (9.107) **equações de Euler** para o movimento do corpo rígido.

As equações de Euler são de difícil solução, pois a escolha de eixos principais, que se movem junto com o corpo, a fim de obter I_1 , I_2 e I_3 constantes em (9.107), faz com que as componentes do torque que aparecem nessas equações sejam ao longo desses eixos móveis. Com isso, temos que essas componentes do torque dependam do próprio movimento do corpo que desejamos encontrar. Em contrapartida, as equações de Euler são muito úteis para descrever rotações livres, *i.e.*, com $\mathbf{N}^{ex} = \mathbf{0}$.

Consideremos a rotação livre de um pião simétrico, *i.e.*, de um corpo rígido com um eixo de simetria, que tomaremos como sendo o eixo $O' \mathcal{X}'_3$, de modo que

$$I_1 = I_2. \quad (9.108)$$

Nesse caso, definindo as quantidades

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \quad \text{e} \quad \Omega = \beta \omega_3, \quad (9.109)$$

as equações (9.107) tomam a forma

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \Omega \omega_2 = 0, \quad \frac{d\omega_2}{dt} - \Omega \omega_1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\omega_3}{dt} = 0. \quad (9.110)$$

Da última dessas equações, obtemos que ω_3 é constante, ou seja,

$$\omega_3 = \omega_{30} \quad (9.111)$$

onde ω_{30} é o valor de ω_3 no instante $t = 0$. Sendo ω_3 constante, concluímos que Ω , definida em (9.109), também é constante.

Usando a variável $\xi = \omega_1 + i\omega_2$, podemos escrever a seguinte equação equivalente às duas primeiras equações em (9.110),

$$\frac{d\xi}{dt} - i\Omega \xi = 0, \quad (9.112)$$

que tem por solução $\xi(t) = \xi_0 e^{i\Omega t}$, onde ξ_0 é uma constante. Voltando às variáveis ω_1 e ω_2 , escrevemos essa solução como

$$\omega_1(t) + i\omega_2(t) = \left(\omega_{10} + i\omega_{20} \right) \left[\cos(\Omega t) + i \operatorname{sen}(\Omega t) \right], \quad (9.113)$$

onde ω_{10} e ω_{20} são, naturalmente, os valores no instante $t = 0$ de ω_1 e ω_2 , respectivamente. Obtemos de (9.113)

$$\omega_1(t) = \omega_{10} \cos(\Omega t) - \omega_{20} \operatorname{sen}(\Omega t) \quad \text{e} \quad \omega_2(t) = \omega_{20} \cos(\Omega t) + \omega_{10} \operatorname{sen}(\Omega t). \quad (9.114)$$

Essas soluções também podem ser escritas como

$$\omega_1(t) = A \cos(\Omega t + \theta) \quad \text{e} \quad \omega_2(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t + \theta), \quad (9.115)$$

onde A e θ são constantes dependentes da velocidade angular inicial e dadas por

$$A = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}. \quad (9.116)$$

As equações (9.115) mostram que a projeção da extremidade final de $\boldsymbol{\omega}$ no plano $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2$ realiza um movimento circular uniforme com velocidade angular Ω , se a extremidade inicial de $\boldsymbol{\omega}$ se mantiver em O' . Levando em conta que a componente de $\boldsymbol{\omega}$ no eixo $O'\mathcal{X}'_3$ permanece constante, concluímos que o vetor $\boldsymbol{\omega}$, com ponto inicial na origem O' , gira em torno do eixo $O'\mathcal{X}'_3$ com velocidade angular constante Ω , varrendo um cone com eixo $O'\mathcal{X}'_3$ e semi-ângulo

$$\alpha_c = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{A}{\omega_3} \right), \quad (9.117)$$

conforme ilustrado na figura 9.3. Em termos do semi-ângulo, o raio da base e a altura do cone são dados, respectivamente, por

$$A = \omega \operatorname{sen} \alpha_c \quad \text{e} \quad \omega_3 = \omega \cos \alpha_c. \quad (9.118)$$

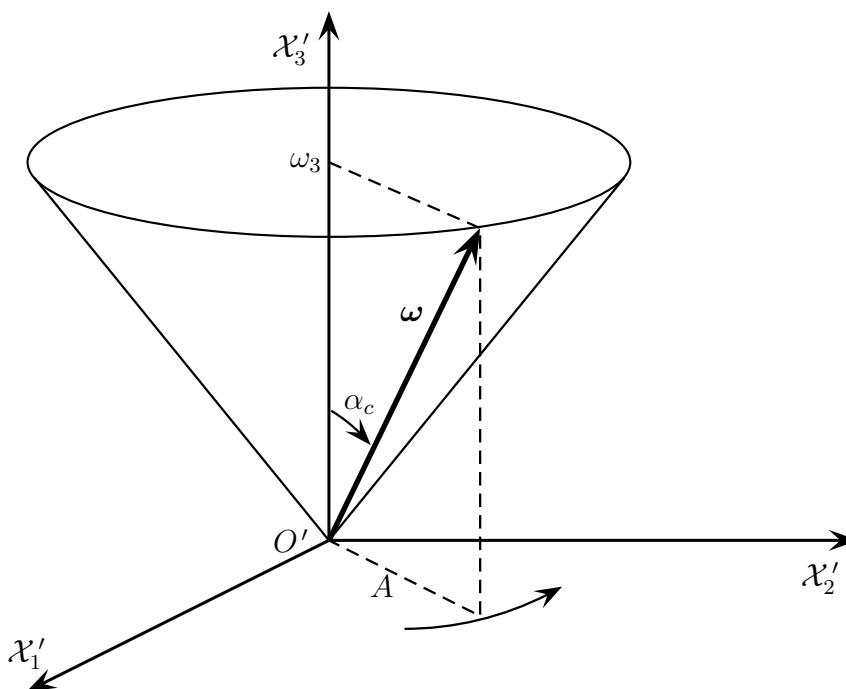


Figura 9.3: Precessão de $\boldsymbol{\omega}$ no cone do corpo.

Observemos que essa última equação mostra que $|\boldsymbol{\omega}|$ é constante, pois A e ω_3 o são, como estabelecido em (9.111) e na primeira igualdade em (9.116).

Podemos dizer que o corpo rígido gira com velocidade angular cujo módulo é constante e cuja direção gira uniformemente em torno do eixo de simetria do corpo, varrendo um cone fixo no corpo, chamado **cone do corpo**. O cone do corpo é gerado pelo movimento do eixo instantâneo de rotação. Em suma, o corpo rígido precessa uniformemente em torno de seu eixo de simetria.

Consideremos como a mudança do vetor $\boldsymbol{\omega}$ é vista do referencial inercial. Em relação a este, o vetor momento angular total \mathbf{L} do corpo rígido é constante, já que, por hipótese, o torque externo total sobre o corpo rígido é nulo. A direção constante de \mathbf{L} provê uma direção natural de referência no referencial inercial. O ângulo α_e que $\boldsymbol{\omega}$ faz com \mathbf{L} é dado por

$$\cos \alpha_e = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{\omega L}. \quad (9.119)$$

Uma vez que não há forças nem torques externos, podemos usar (9.106) para obter que $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$ é constante. Como os módulos ω e L também são constantes, concluímos que o ângulo α_e é constante. Portanto, $\boldsymbol{\omega}$ está sempre em um cone de semi-ângulo α_e , fixo no referencial inercial; dizemos que esse cone está **fixo no espaço** e nos referimos a ele como **cone do espaço**. Fazendo-se o produto misto dos vetores $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{L} e \mathbf{e}'_3 , e levando-se em conta que o pião é simétrico em torno do eixo de \mathbf{e}'_3 , obtemos que a velocidade angular do pião, seu momento angular e seu eixo de simetria estão, a cada instante, em um mesmo plano. Uma vez que $\boldsymbol{\omega}$ gira no cone do corpo em

torno do eixo de simetria, temos que, no referencial inercial, o plano citado, além de conter o eixo de \mathbf{L} , está girando em torno dele, conforme indicado na figura 9.4. É evidente que o cone do corpo e o cone do espaço estão em permanente contato ao longo de $\boldsymbol{\omega}$, pois ambos são gerados como varreduras de $\boldsymbol{\omega}$. No referencial inercial vemos, portanto, o cone do corpo rolando na superfície do cone do espaço. Uma vez que os pontos do cone do corpo que estão ao longo de $\boldsymbol{\omega}$ estão instantaneamente em repouso, o cone do corpo rola sem deslizar sobre a superfície do cone do espaço. Esse rolamento sem deslizamento determina completamente o movimento do pião simétrico, pois sendo o cone do corpo fixo no corpo, seu movimento em relação ao referencial inercial determina completamente o movimento do corpo rígido em relação a esse referencial.

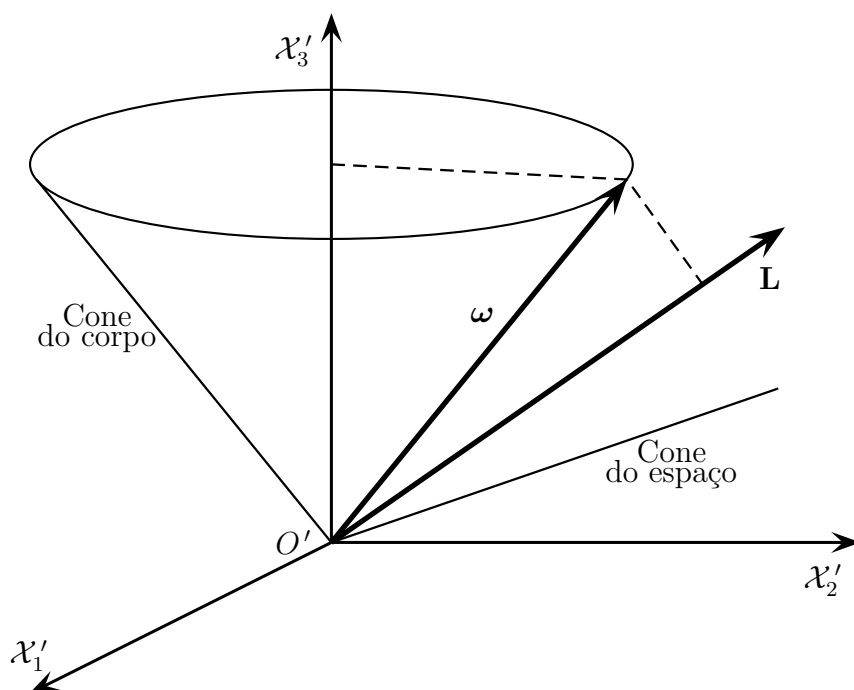


Figura 9.4: O cone do corpo rola sem deslizar sobre o cone do espaço. O sistema de eixos do corpo $O'x_1'x_2'x_3'$ e o próprio corpo movem-se junto com o cone do corpo.

Agora, investiguemos como se processa o movimento de rotação livre de um corpo rígido em torno de um eixo bem próximo a um eixo principal. Esse problema é particularmente interessante, porque um corpo rígido posto a rodar em torno de um eixo principal não está livre, na prática, de pequenas perturbações que inclinam o eixo de rotação em relação ao principal. É importante saber se essa inclinação permanece pequena ou não, *i.e.*, se a rotação em torno do eixo principal é estável ou não. Consideramos o corpo rígido com três momentos de inércia distintos, I_1 , I_2 e I_3 e supomos que a rotação ocorra em torno de um eixo levemente inclinado em

relação ao eixo $O'\mathcal{X}'_3$. Com isso, temos ω_1 e ω_2 muito menores do que ω_3 . Nessas condições, podemos desprezar o termo que contém o produto $\omega_1\omega_2$ nas equações de Euler (9.107) e obter, em primeira aproximação, as equações

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0, \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \quad \text{e} \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0. \quad (9.120)$$

A última equação em (9.120) nos fornece que ω_3 é constante, *i.e.*,

$$\omega_3 = \omega_{30}, \quad (9.121)$$

onde ω_{30} é o valor no instante $t = 0$ da componente ω_3 da velocidade angular; vamos supor, sem perda de generalidade, que ω_3 é positiva. Para as duas outras equações, vamos procurar soluções da forma

$$\omega_1 = \Re A_1 e^{ipt} \quad \omega_2 = \Re A_2 e^{ipt}. \quad (9.122)$$

Notemos que, se $p \in \mathbb{R}$, é suficiente tomar p positivo, pois o caso negativo apenas muda o sinal de fases constantes nas expressões finais de ω_1 e ω_2 . Substituindo as expressões anteriores nas duas primeiras equações diferenciais em (9.120), obtemos o par de equações

$$ipI_1 A_1 + (I_3 - I_2)\omega_3 A_2 = 0 \quad \text{e} \quad (I_1 - I_3)\omega_3 A_1 + ipI_2 A_2 = 0. \quad (9.123)$$

Esse sistema de equações tem solução não-trivial para A_1 e A_2 se, e somente se, o seu determinante é nulo,

$$-I_1 I_2 p^2 - (I_1 - I_3)(I_3 - I_2)\omega_3^2 = 0. \quad (9.124)$$

Portanto, devemos ter

$$p = \beta \omega_3, \quad (9.125)$$

onde β é dado pela definição

$$\beta = \sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}}, \quad (9.126)$$

que reduz-se à primeira das equações em (9.109) no caso em que $I_1 = I_2$. Usando no sistema de equações (9.123) a condição (9.125) e a definição (9.126), obtemos

$$\frac{A_1}{A_2} = i \sqrt{\frac{I_2}{I_1} \frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1}}. \quad (9.127)$$

Se I_3 for o maior dentre os momentos de inércia, a quantidade β , definida em (9.126), é real e podemos escrever as amplitudes relacionadas por (9.127) na forma

$$A_1 = A \sqrt{I_2(I_3 - I_2)} e^{i\theta} \quad A_2 = A \sqrt{I_1(I_3 - I_1)} e^{i(\theta - \pi/2)} \quad (9.128)$$

na qual A e θ são duas constantes reais. Usando essas expressões e o resultado (9.125) em (9.122), obtemos

$$\omega_1 = \Re A \sqrt{I_2(I_3 - I_2)} e^{i(\beta\omega_3 t + \theta)} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \Re A \sqrt{I_1(I_3 - I_1)} e^{i(\beta\omega_3 t + \theta - \pi/2)}, \quad (9.129)$$

ou seja,

$$\omega_1 = A\sqrt{I_2(I_3 - I_2)} \cos(\beta\omega_3 t + \theta) \quad \text{e} \quad \omega_2 = A\sqrt{I_1(I_3 - I_1)} \sin(\beta\omega_3 t + \theta). \quad (9.130)$$

Essas soluções satisfazem qualquer condição inicial para os valores de ω_1 e ω_2 e, portanto, juntamente com (9.121), constituem-se na solução geral do problema na situação em que I_3 é o maior dentre os momentos de inércia do corpo rígido. A solução geral mostra um vetor $\boldsymbol{\omega}$ girando em torno do eixo desse maior momento de inércia com velocidade angular $\beta\omega_3$ em sentido anti-horário e traçando uma elipse com sua extremidade; o corpo rígido está em precessão, com sentido anti-horário, em torno desse eixo de maior momento de inércia. Sendo as funções seno e cosseno limitadas, ω_1 e ω_2 permanecem pequenas se os seus valores iniciais forem pequenos, ou seja, a rotação em torno do eixo principal com maior momento de inércia é estável.

No caso em que I_3 é o menor dos momentos de inércia, o corpo rígido está em precessão em torno do eixo desse menor momento de inércia, em sentido horário. Encontramos que a rotação em torno do eixo principal com menor momento de inércia também é estável. Finalmente, no caso em que o momento de inércia I_3 tem valor intermediário entre os valores dos outros dois momentos de inércia, β em (9.126) e p em (9.125) são imaginários puros. No lugar de (9.130) obtemos soluções exponenciais e, mesmo inicialmente com direção próxima do eixo principal, sob perturbações a velocidade angular afasta-se indefinidamente do eixo; as próprias condições de validade da aproximação (9.120) das equações de Euler deixam de ser válidas. Encontramos que o movimento de rotação em torno do eixo de momento de inércia intermediário é instável.

9.7 Ângulos de Euler

Nesta seção voltamos à cinemática do corpo rígido para desenvolver um tópico importante. Como já havíamos discutido, são necessárias seis coordenadas para se determinar univocamente a configuração de um corpo rígido no espaço. Podemos usar três delas para localizar o centro de massa ou um ponto qualquer do corpo rígido. Devemos então usar outras três coordenadas para especificar a orientação do corpo em torno do ponto já localizado. Vamos agora definir ângulos de Euler, três coordenadas que determinam que orientações um corpo rígido pode ter no espaço quando ele tem um ponto fixo.

Seja um sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ em relação ao qual especificaremos a configuração do corpo rígido. Por hipótese, o corpo rígido tem um ponto fixo em relação a esse sistema de eixos e, sem perda de generalidade, escolhemos a origem O do sistema de eixos no ponto fixo do corpo rígido. Escolhemos também um sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ fixo no corpo e com a origem O' também no ponto fixo do corpo. Com isso, os dois sistemas de eixos têm origem comum, $O' = O$, e a configuração do corpo rígido relativa ao sistema $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ fica univocamente determinada pelo posicionamento do sistema $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ em relação ao sistema $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$. Na maior parte das aplicações o sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ é o de um referencial inercial ou mantém as direções de seus eixos fixas em relação a um referencial inercial. Utilizaremos dois

ângulos para determinar a direção e o sentido de $O'\mathcal{X}'_3$ em relação a $O'\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$; o primeiro ângulo, φ , indicará a orientação do plano $O'\mathcal{X}_3\mathcal{X}'_3$ e o segundo, θ , será o ângulo entre $O'\mathcal{X}'_3$ e $O'\mathcal{X}_3$. Com o posicionamento do eixo $O'\mathcal{X}'_3$ determinado, usaremos um terceiro ângulo, ψ , para indicar a orientação dos eixos $O'\mathcal{X}'_1$ e $O'\mathcal{X}'_2$ em torno de $O'\mathcal{X}'_3$. A seguir, passamos à definição precisa dos três ângulos φ , θ e ψ .

Em primeiro lugar, rodemos os eixos $O'\mathcal{X}_1$ e $O'\mathcal{X}_2$ de um ângulo φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) em torno de $O'\mathcal{X}_3$ para obter o sistema de eixos $O'\Xi_1\Xi_2\Xi_3$, no qual $O'\Xi_3 = O'\mathcal{X}_3$ e

$$\varphi = \widehat{\mathcal{X}'_1 O' \Xi_1} = \widehat{\mathcal{X}'_2 O' \Xi_2} . \quad (9.131)$$

Agora rodemos o eixo $O'\Xi_3$ (até agora coincidente com $O'\mathcal{X}_3$) e o eixo $O'\Xi_2$ de um ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) em torno de $O'\Xi_1$, para obter o sistema de eixos $O'\Xi'_1\Xi'_2\Xi'_3$, no qual $O'\Xi'_1 = O'\Xi_1$ e

$$\theta = \widehat{\Xi'_3 O' \Xi'_3} = \widehat{\mathcal{X}'_2 O' \Xi_2} . \quad (9.132)$$

Finalmente, rodemos os eixos $O'\Xi'_1$ e $O'\Xi'_2$ de um ângulo ψ ($0 \leq \psi < 2\pi$) em torno de $O'\Xi'_3$, para obter o sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$, no qual $O'\mathcal{X}'_3 = O'\Xi'_3$ e

$$\psi = \widehat{\Xi'_1 O' \mathcal{X}'_1} = \widehat{\Xi'_2 O' \mathcal{X}'_2} . \quad (9.133)$$

A figura 9.5 ilustra as três rotações descritas anteriormente.

Figura 9.5: Ângulos de Euler φ , θ e ψ ; o eixo $O'\Xi_2$ não é mostrado na figura.

O eixo $O'\Xi'_1$, no qual os planos $O'\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ e $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2$ se interceptam, é chamado **eixo nodal**. Notemos que, por definição, o eixo nodal é sempre perpendicular ao plano $O'\mathcal{X}_3\mathcal{X}'_3$. Os ângulos φ , θ e ψ são chamados **ângulos eulerianos**. Observe que o eixo $O'\mathcal{X}'_3$ desempenha um papel especial na definição dos ângulos eulerianos; quando há um eixo de simetria para o corpo ou para os torques externos, é conveniente tomá-lo como sendo o eixo $O'\mathcal{X}'_3$.

Vemos que os três ângulos de Euler foram definidos por meio de uma construção geométrica bem definida que, em três passos, transforma o sistema de eixos $O'\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ no sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$. Como conseqüência dessa construção, a cada trinca de ângulos de Euler fica associada uma única orientação do corpo rígido no espaço. A construção pode ser invertida para passarmos de qualquer orientação do corpo rígido para uma trinca de ângulos de Euler. Essa trinca é univocamente determinada a partir da orientação do corpo se evitarmos valores críticos como, *e.g.*, $\theta = 0$. Há uma correspondência biunívoca entre as orientações do corpo e as trincas de ângulos de Euler se esses ficarem restritos aos intervalos dados por $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \psi < 2\pi$. No aberto de \mathbb{R}^3 definido por essas desigualdades os ângulos de Euler formam um sistema de coordenadas para as orientações do corpo rígido em torno do um ponto O' . Na prática, é raro haver necessidade de considerar explicitamente essas restrições nos valores dos ângulos de Euler.

O movimento mais geral de rotação do corpo rígido em torno de O' será dado por φ , θ e ψ como funções do tempo. Temos, a cada instante, uma velocidade angular $\dot{\psi}\hat{\xi}'_3$ de $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ em relação a $O'\Xi'_1\Xi'_2\Xi'_3$, uma velocidade angular $\dot{\theta}\hat{\xi}'_1$ de $O'\Xi'_1\Xi'_2\Xi'_3$ em relação a $O'\Xi_1\Xi_2\Xi_3$ e uma velocidade angular $\dot{\varphi}\mathbf{e}_3$ de $O'\Xi_1\Xi_2\Xi_3$ em relação a $O'\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$. Usando o teorema (9.43) para a composição de velocidades angulares, concluímos que a velocidade angular do sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$, *i.e.*, do corpo rígido, em relação ao sistema de eixos $O'\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$, é dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 + \dot{\theta}\hat{\xi}'_1 + \dot{\psi}\hat{\xi}'_3. \quad (9.134)$$

Estaremos interessados em lidar com as componentes da velocidade angular no sistema de eixos principais do corpo rígido. Passemos então à obtenção das componentes de $\boldsymbol{\omega}$ no sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ fixo no corpo rígido. Devemos expressar todos os vetores unitários que aparecem na expressão (9.134) em termos dos vetores unitários da base $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ desse sistema de eixos. Com o auxílio da figura 9.5, obtemos que os vetores da base $(\hat{\xi}'_1, \hat{\xi}'_2, \hat{\xi}'_3)$ são dados por

$$\hat{\xi}'_1 = \mathbf{e}'_1 \cos\psi - \mathbf{e}'_2 \sin\psi, \quad \hat{\xi}'_2 = \mathbf{e}'_1 \sin\psi + \mathbf{e}'_2 \cos\psi \quad \text{e} \quad \hat{\xi}'_3 = \mathbf{e}'_3. \quad (9.135)$$

Uma vez que $\hat{\xi}'_1 = \hat{\xi}'_1$, obtemos da primeira igualdade em (9.135)

$$\hat{\xi}'_1 = \mathbf{e}'_1 \cos\psi - \mathbf{e}'_2 \sin\psi. \quad (9.136)$$

Resta na fórmula (9.134) apenas o vetor \mathbf{e}_3 para ser expresso em termos dos vetores da base $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. Novamente, com o auxílio da figura 9.5, obtemos

$$\mathbf{e}_3 = \hat{\xi}'_3 \cos\theta + \hat{\xi}'_2 \sin\theta, \quad (9.137)$$

que, em virtude de (9.135), pode ser reescrita como

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_1 \sin \theta \sin \psi + \mathbf{e}'_2 \sin \theta \cos \psi + \mathbf{e}'_3 \cos \theta . \quad (9.138)$$

Agora usamos (9.138), (9.136) e a última igualdade em (9.135) na expressão (9.134) da velocidade angular para obter

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(\mathbf{e}'_1 \sin \theta \sin \psi + \mathbf{e}'_2 \sin \theta \cos \psi + \mathbf{e}'_3 \cos \theta) + \dot{\theta}(\mathbf{e}'_1 \cos \psi - \mathbf{e}'_2 \sin \psi) + \dot{\psi} \mathbf{e}'_3 , \quad (9.139)$$

donde obtemos

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi , \quad \omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \quad \text{e} \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta . \quad (9.140)$$

Na próxima seção passamos ao estudo de um problema no qual os ângulos de Euler desempenham um papel preponderante, o pão simétrico em campo gravitacional.

9.8 Pião simétrico com ponta fixa em campo gravitacional

Nesta seção estaremos interessados em estudar o movimento de um pião simétrico com a sua ponta fixa e sob a ação da gravidade. Uma vez que a ponta é fixa, necessitaremos apenas de três coordenadas para descrever o movimento de rotação do pião em torno da ponta. Esse é um problema no qual usamos os ângulos de Euler para descrever o movimento e no qual a solução das equações de movimento é completa.

Consideremos que o pião simétrico tem sua ponta fixa no referencial inercial. A situação real corriqueira é a do pião girando com a ponta fixa no solo. Escolhemos um sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ fixo no corpo com a origem O' na ponta fixa do pião. Como de costume, entendemos a simetria do pião como sendo simetria por rotação em torno de um eixo que passa pela ponta. Vamos escolher o eixo $O'\mathcal{X}'_3$ ao longo do eixo de simetria do pião. Os três eixos do sistema $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ são eixos principais de inércia, com respectivos momentos de inércia I_1 , I_2 e I_3 . A simetria do pião requer $I_1 = I_2$. O sistema de eixos $O\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$ está fixo no referencial inercial em uso e sua origem O é escolhida na ponta fixa do pião.

A nossa estratégia para encontrar os movimentos possíveis desse pião não será tentar resolver diretamente as equações de movimento de Euler (9.107), uma vez que no presente caso, em que há torque externo, elas tornam-se complicadas. Em vez disso, vamos usar constantes de movimento do pião que são, afinal de contas, quantidades importantes obtidas das equações de movimento. Nosso procedimento consistirá em buscar constantes de movimento suficientes, expressando-as em termos dos ângulos eulerianos, para reduzirmos a solução do problema a simples quadraturas nessas variáveis.

A energia mecânica E do pião se conserva, pois a única força que realiza trabalho nesse problema é o peso, uma força conservativa. A energia potencial associada pode ser escrita como

$$U(\mathbf{a}) = m g a \cos \theta , \quad (9.141)$$

Figura 9.6: Pião simétrico com ponta fixa em campo gravitacional uniforme.

onde $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{a}}$ é o vetor-posição do centro de massa do pião e θ o ângulo de Euler que dá a inclinação do eixo de simetria do pião em relação ao eixo vertical do referencial inercial. A energia cinética do pião é dada em termos dos momentos principais de inércia por

$$T = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2, \quad (9.142)$$

de acordo com o que obtivemos em (9.87). Substituindo na equação anterior as expressões de ω_1 , ω_2 e ω_3 dadas em termos dos ângulos eulerianos por (9.140), e somando o resultado obtido com a energia potencial (9.141), obtemos a energia mecânica

$$E = \frac{1}{2}I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi} \sin^2\theta \right) + \frac{1}{2}I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \right)^2 + mga \cos\theta, \quad (9.143)$$

onde usamos a igualdade $I_1 = I_2$ decorrente da simetria do pião.

Uma segunda constante de movimento, independente da anterior, pode ser obtida diretamente das equações de Euler. De fato, no caso do pião simétrico a terceira equação de Euler em (9.107) nos fornece que a componente ω_3 da velocidade angular é constante,

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 0, \quad (9.144)$$

pois $I_2 = I_1$ e é nula a componente N_3^{ex} do torque externo total ao longo do eixo $O'\mathcal{X}'_3$. De fato, o torque externo total é devido somente ao peso do pião e é dado por $\mathbf{a} \times m\mathbf{g}$;

ele aponta ao longo do eixo nodal e , conseqüentemente, não tem componente ao longo do eixo $O'\mathcal{X}'_3$. Portanto, temos a quantidade ω_3 conservada e, usando a terceira equação em (9.140), obtemos a sua expressão em termos de ângulos eulerianos, $\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta$. Vamos preferir trabalhar com a quantidade conservada obtida como o produto de ω_3 pelo momento de inércia I_3 , qual seja, a quantidade L_ψ definida por

$$L_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) . \quad (9.145)$$

Vimos que o torque externo total aponta na direção do eixo nodal. Ele é perpendicular não somente ao eixo $O'\mathcal{X}'_3$, mas também ao eixo $O'\mathcal{X}_3$. A ausência de componente do torque externo total ao longo do eixo $O'\mathcal{X}_3$ do referencial inercial implica em ser constante a componente do momento angular do corpo ao longo desse eixo, como nos garante (9.3). Temos, portanto, a terceira constante de movimento, independente das duas anteriores, dada por $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L}$. Denotando-a por L_φ , temos

$$L_\varphi = \mathbf{e}_3 \cdot (I_1\omega_1 \mathbf{e}'_1 + I_2\omega_2 \mathbf{e}'_2 + I_3\omega_3 \mathbf{e}'_3) \quad (9.146)$$

onde usamos a expressão (9.86) do momento angular em uma base principal de inércia e levamos em consideração que essa base no presente contexto é a base $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ do sistema de eixos $O'\mathcal{X}'_1\mathcal{X}'_2\mathcal{X}'_3$ fixo no corpo. Para obtermos a expressão de L_φ em termos de ângulos eulerianos, utilizaremos em (9.146) a expressão (9.138) de \mathbf{e}_3 na base ortonormal $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ e as expressões (9.140) das componentes de $\boldsymbol{\omega}$ nessa base. Obtemos

$$L_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \cos \theta . \quad (9.147)$$

Em suma, temos as três constantes de movimento independentes para o pião simétrico,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + m g a \cos \theta , \\ L_\psi &= I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \quad e \\ L_\varphi &= I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \cos \theta . \end{aligned} \quad (9.148)$$

Como não aparecem φ , ψ e $\dot{\theta}$ nas expressões de L_ψ e L_φ , essas podem ser utilizadas para expressarmos $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ em função apenas de θ , de modo a obtermos

$$\dot{\varphi} = \frac{L_\varphi - L_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad e \quad \dot{\psi} = \frac{L_\psi}{I_3} - \frac{L_\varphi - L_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta . \quad (9.149)$$

De posse desses resultados, escrevemos a energia mecânica E como função apenas da coordenada θ e sua velocidade $\dot{\theta}$,

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(L_\varphi - L_\psi \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_\psi^2}{2 I_3} + m g a \cos \theta . \quad (9.150)$$

Agora, definimos um potencial efetivo U_{ef} e uma nova constante E' , por meio de

$$U_{ef}(\theta) = mga \cos \theta + \frac{(L_\varphi - L_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} \quad (9.151)$$

e

$$E' = E - \frac{L_\psi^2}{2I_3}. \quad (9.152)$$

Usando essas definições, reescrevemos (9.150) na forma

$$E' = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + U_{ef}(\theta). \quad (9.153)$$

Essa é uma equação de um problema unidimensional, cuja solução reduz-se à quadratura

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{E' - U_{ef}(\theta')}} = \sqrt{\frac{2}{I_1}}(t - t_i), \quad (9.154)$$

onde θ_i é o valor do ângulo θ em um instante inicial arbitrário t_i . Dessa equação obtemos t como uma função de θ que, após ser invertida, nos fornece θ como função de t . A substituição da expressão $\theta(t)$, de θ como função de t , nas equações escritas em (9.149) determina as velocidades $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ como funções do tempo. Integrando essas funções e usando a condição inicial do corpo rígido, obtemos φ e ψ como funções do tempo. De posse dessas três funções $\theta(t)$, $\varphi(t)$ e $\psi(t)$, temos completamente resolvido o problema do pião simétrico com ponta fixa sob a ação da gravidade.

Mesmo sem resolver a integral em (9.154), podemos obter algumas características qualitativas do movimento do pião. Além do movimento de rotação em torno do eixo de simetria $O'\mathcal{X}_3$, com velocidade angular constante ω_3 , temos um movimento de precessão do eixo de simetria $O'\mathcal{X}_3'$ em torno do eixo $O'\mathcal{X}_3$, cuja velocidade angular é $\dot{\varphi}$, e um movimento de variação da inclinação θ do eixo de simetria do pião em relação à vertical. Esse movimento é governado pela equação (9.153), ou seja, pela forma do potencial efetivo (9.151).

Para $L_\varphi \neq L_\psi$, que é o caso que nos interessa agora, o potencial efetivo U_{ef} tende para infinito quando θ tende a 0 ou π . Sendo contínua no intervalo $(0, \pi)$, a função U_{ef} tem, portanto, algum mínimo nesse intervalo. Se tivesse mais do que um mínimo, seria possível encontrar valores para E' tais que a equação $E' = U_{ef}(\theta)$ teria pelo menos quatro raízes no intervalo. Mas isso é absurdo, pois essa equação é equivalente a uma equação polinomial do terceiro grau; logo, U_{ef} tem um único mínimo no intervalo $(0, \pi)$ e seu gráfico nesse intervalo é da forma mostrada na figura 9.7.

Se $E' = U_{ef}(\theta_0)$, onde θ_0 é o ponto de mínimo, a inclinação do eixo do pião permanece constante durante a precessão. Se $E' > U_{ef}(\theta_0)$, a equação $E' = U_{ef}(\theta)$ tem duas raízes, que correspondem às inclinações do eixo $O'\mathcal{X}_3'$ para as quais $\dot{\theta} = 0$. Sejam θ_1 e θ_2 essas raízes, com $\theta_1 < \theta_2$. Temos pois que a inclinação θ oscila em torno de θ_0 , mínimo do potencial efetivo, entre os valores θ_1 e θ_2 . Esse movimento do eixo do pião é chamado **nutação**. As raízes θ_1 e θ_2 desempenham no movimento de nutação um papel análogo ao dos pontos de retorno já estudados no movimento retilíneo e no movimento planetário.

Figura 9.7: Potencial efetivo do pião simétrico.

Enquanto se processa a nutação, a velocidade de precessão pode mudar ou não de sinal, dependendo dos valores de L_φ e L_ψ e do domínio de variação de θ na expressão de $\dot{\varphi}$ em (9.149). Seja uma esfera centrada em O' , na qual o eixo do pião trace uma curva durante o seu movimento. Se $L_\varphi - L_\psi \cos \theta$ não mudar de sinal durante a nutação, a curva traçada terá a forma da figura 9.8(a). Se $L_\varphi - L_\psi \cos \theta$ mudar de sinal, a forma será a da figura 9.8(b). No caso limítrofe em que $L_\varphi - L_\psi \cos \theta$ é zero quando $\theta = \theta_1$, juntamente com $\dot{\theta}$, a curva apresentará cúspides como mostra a figura 9.8(c).

Figura 9.8: Combinações da nutação com a precessão.

Capítulo 10

Mecânica Analítica

10.1 Introdução

As forças da Mecânica Clássica são definidas como funções dadas das possíveis posições e velocidades das partículas interagentes, e também do tempo, se o sistema não for isolado. No caso de um sistema de N partículas, tais posições e velocidades formam um conjunto de $6N$ variáveis reais que, como de costume, representamos por $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N$. A situação mais simples, pressuposta ao enunciarmos os Princípios da Mecânica, é aquela em que as $6N$ variáveis são independentes. Por independentes entendemos que são definidas em um conjunto aberto de \mathbb{R}^{6N} . Mais especificamente, consideramos que o domínio das configurações do sistema, *i.e.*, das N -uplas de posições das partículas do sistema, é um aberto \mathcal{U}^{3N} de \mathbb{R}^{3N} e o domínio das distribuições de velocidades é o próprio \mathbb{R}^{3N} . Portanto, o estado dinâmico do sistema é definido em $\mathcal{U}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ e as forças sobre as partículas do sistema são funções dadas do estado dinâmico e do instante considerado. Escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k : \quad \mathcal{U}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times I &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}}^7 \\ : (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) &\longmapsto \mathbf{F}_k, \quad (k = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (10.1)$$

onde I é o intervalo aberto de tempo em que consideramos as forças e os movimentos do sistema e \mathbf{F}_k é a força total sobre a k -ésima partícula, dada pela função-força \mathcal{F}_k . Tais forças obedecem o Princípio da Superposição, pelo qual a força de interação entre um par de partículas independe das outras partículas presentes. O problema fundamental da dinâmica consiste exatamente em determinar os movimentos possíveis do sistema quando são dadas as forças como funções das posições e velocidades e do tempo.

Entretanto, uma outra situação mais complicada costuma também ser considerada. Ocorre que muitas vezes é conveniente ou necessário fazer a idealização de que certas forças restringem as possíveis posições e velocidades das partículas do sistema a algum conjunto não-aberto de \mathbb{R}^{6N} . Tais restrições são chamadas **vínculos** e as forças que as implementam, **forças vinculares**, ou **reações vinculares**. Nesse contexto, as forças que não são vinculares são chamadas **forças dadas**. A presença de vínculos no sistema gera dois inconvenientes. O primeiro é que as posições e velocidades

das partículas do sistema deixam de ser variáveis independentes. O segundo é que as forças vinculares, ao contrário das forças dadas, não são dadas como funções do estado dinâmico do sistema e do instante considerado. Elas são funções incógnitas do tempo que dependem das outras forças atuantes no sistema e do particular movimento que o sistema realiza. A Mecânica Analítica procura métodos de suplantarem esses inconvenientes. Ela procura determinar os movimentos possíveis do sistema e as correspondentes forças vinculares a partir do conhecimento das forças dadas e dos vínculos sobre o sistema de partículas.

Vamos considerar uma particular classe de vínculos dados por relações que envolvem somente as posições das partículas e o tempo. Sejam \mathcal{U}^{3N} um aberto de R^{3N} e I um intervalo aberto de \mathbb{R} . Consideremos ν funções reais definidas em $\mathcal{U} \times I$,

$$\begin{aligned} h_\alpha : \quad & \mathcal{U}^{3N} \times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ & : (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) \longmapsto a_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu; \nu < 3N). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Por hipótese, essas ν funções são independentes, *i.e.*, o posto da matriz $\nu \times 3N$ definida pelas derivadas parciais das funções (10.2) em relação às variáveis de \mathcal{U} , $[\partial h_\alpha / \partial \mathbf{r}_k]$, é maximal, ou seja, igual a ν ,

$$\text{posto} \left[\frac{\partial h_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} \right] = \nu. \quad (10.3)$$

Vínculos que são descritos por relações obtidas pela condição de que os valores a_α das funções (10.2) sejam constantes, $a_\alpha = \text{constante}$ ($\alpha = 1, \dots, \nu$), são chamados **vínculos holônomos**; todos os outros tipos de vínculos são ditos **não-holônomos**. Notemos que não há perda de generalidade se definirmos vínculos holônomos impondo que os valores constantes de a_α ($\alpha = 1, \dots, \nu$) sejam nulos, pois qualquer vínculo holônomo da forma $h_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) = a_\alpha = \text{constante}$ pode ser substituído pelo vínculo holônomo equivalente $h'_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) = 0$, onde $h'_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) = h_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) - a_\alpha$. Portanto, podemos afirmar que vínculos holônomos são definidos por equações

$$h_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu; \nu < 3N), \quad (10.4)$$

nas quais h_α ($\alpha = 1, 2, \dots, \nu$) são funções da forma (10.2). Uma vez que as funções são independentes, também dizemos que (10.4) são **vínculos independentes**.

Um vínculo é dito **reônomo** quando depende do tempo e **esclerônomo** quando não depende. Por exemplo, os vínculos holônomos, definido em (10.2), são reônomos se $\partial h_\alpha / \partial t \neq 0$ para algum α , e esclerônomos se $\partial h_\alpha / \partial t = 0$ para $\alpha = 1, \dots, \nu$.

Em nosso estudo introdutório da Mecânica Analítica somente consideraremos vínculos holônomos, para os quais enunciaremos o princípio de D'Alembert.

10.2 Princípio de D'Alembert e equações de Lagrange

Seja um sistema de N partículas sujeito aos ν vínculos holônomos independentes (10.4). Sobre esse sistema agem forças vinculares que garantem a existências dos ditos

vínculos sobre o sistema e que são *a priori* desconhecidas; denotemos por \mathbf{R}_k a força vincular total sobre a k -ésima partícula. Sobre o sistema agem as forças dadas, que são funções conhecidas da configuração $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ do sistema, de sua distribuição de velocidades $(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$ e do tempo t . Entretanto, o domínio de configurações e velocidades não é mais um aberto $\mathcal{U}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ de \mathbb{R}^{6N} , como em (10.1), mas o subconjunto de \mathbb{R}^{6N} que obedece os vínculos (10.4); denotemos por \mathbf{F}_k a força dada total sobre a k -ésima partícula. A Segunda Lei de Newton aplicada às partícula do sistema nos fornece as equações de movimento

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k \quad (k = 1, \dots, N). \quad (10.5)$$

O problema a ser resolvido consiste em, dada qualquer condição inicial compatível com os vínculos (10.4), determinar para ela o movimento do sistema e as reações vinculares que satisfazem as equações de movimento (10.5) e os vínculos (10.4).

Para investigar as restrições que os vínculos impõem às coordenadas, consideremos, em um instante fixo, deslocamentos infinitesimais $\delta\mathbf{r}_1, \dots, \delta\mathbf{r}_N$ em \mathbb{R}^{3N} que sejam compatíveis com os vínculos (10.4). Eles não estão sujeitos a nenhuma outra restrição e são ditos **deslocamentos virtuais** porque não precisam ser deslocamentos que as partículas do sistema de fato sofrem ao realizar um de seus movimentos reais, *i.e.*, um dos movimentos que satisfazem às equações de movimento (10.5). Os deslocamentos infinitesimais reais das partículas serão representados, como de costume, por $d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_N$; eles ocorrem em um certo intervalo de tempo dt e, por serem reais, são, por definição, compatíveis com os vínculos. Por brevidade, também nos refimos aos deslocamentos virtuais infinitesimais instantâneos compatíveis com os vínculos como, simplesmente, deslocamentos virtuais.

Em um intervalo de tempo dt , os deslocamentos reais infinitesimais e compatíveis com os vínculos (10.4), realizados pelas partículas, são os deslocamentos $d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_N$ que satisfazem às equações

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial h_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot d\mathbf{r}_k + \frac{\partial h_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \nu), \quad (10.6)$$

onde $\partial/\partial \mathbf{r}_k$ representa o gradiente formado com as coordenadas da k -ésima partícula, que também costuma ser representado por ∇_k ,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} = \nabla_k = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x_k} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y_k} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z_k}. \quad (10.7)$$

Em contrapartida, os deslocamentos virtuais infinitesimais instantâneos compatíveis com os vínculos são os deslocamentos infinitesimais que satisfazem às equações

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial h_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \nu). \quad (10.8)$$

É fácil imaginar exemplos de vínculos esclerônomos nos quais deslocamentos virtuais das partículas também são possíveis deslocamentos reais e, em contrapartida, exemplos de vínculos reônomos nos quais deslocamentos virtuais das partículas não são possíveis deslocamentos reais.

Para resolver o problema que nos ocupa nesta seção, vamos usar a hipótese devida a D'Alembert, de que as forças vinculares satisfazem à condição

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad (10.9)$$

para quaisquer deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{r}_k$ ($k=1 \dots N$) compatíveis com os vínculos. Tal hipótese é chamada **Princípio de D'Alembert** e, como veremos, leva a um método geral de solução do problema de resolver as equações de movimento (10.5) sob os vínculos (10.4). Produtos escalares de forças por deslocamento virtuais, bem como somas desses produtos, são chamados **trabalhos virtuais**. Com essa nomenclatura, o Princípio de D'Alembert (10.9) pode ser enunciado da seguinte maneira: “em quaisquer deslocamentos virtuais infinitesimais instantâneos compatíveis com os vínculos, é nulo o trabalho virtual total realizado por todas as forças vinculares” ou, de modo bem abreviado, “os vínculos são em conjunto inoperantes em deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos”. Em tratamentos mais aprofundados da Mecânica Analítica são investigadas as condições gerais de validade do Princípio de D'Alembert; no presente estudo consideramos somente problemas nos quais o dito princípio é uma simples conseqüência das propriedades das forças em consideração.

A utilidade mais imediata do Princípio de D'Alembert é eliminar das equações de movimento (10.5) as forças vinculares. Para isso, começamos isolando \mathbf{R}_k em (10.5) e substituindo o resultado em (10.9). Obtemos

$$\sum_{k=1}^N (m_k \ddot{\mathbf{r}}_k - \mathbf{F}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (10.10)$$

Agora, devemos recuperar dessa única equação as equações de movimento independentes que permitam encontrar os possíveis movimentos do sistema compatíveis com os vínculos. Para isso, usaremos as equações de vínculo (10.4) para substituir os deslocamentos virtuais, coordenadas e velocidades restritos pelos vínculos por novos deslocamentos virtuais, coordenadas e velocidades independentes.

As condições de vínculo (10.4) são ν relações independentes entre as $3N$ coordenadas das partículas. Conseqüentemente, elas permitem, em virtude do Teorema da Função Implícita, expressar essas coordenadas em função de $n = 3N - \nu$ coordenadas independentes, definidas em um aberto \mathcal{U}^n de \mathbb{R}^n . Desse modo, denotando as coordenadas independentes por q_1, \dots, q_n , temos

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{f}_k(q_1, \dots, q_n; t) \quad ((q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{U}^n), \quad (k = 1, \dots, N), \quad (10.11)$$

onde as funções \mathbf{f}_k ($k = 1, \dots, N$), dadas pelo Teorema da Função Implícita, gozam da propriedade posto $[\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i] = n$. Elas definem uma bijeção entre as n -uplas $(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{U}^n$ e configurações do sistema compatíveis com os vínculos. Note-mos que, embora para quaisquer $(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{U}^n$ as imagens dessas funções definam configurações compatíveis com os vínculos, nem todas as configurações compatíveis com os vínculos são dadas por imagens das funções \mathbf{f}_k ($k = 1, \dots, N$). Geralmente, são necessárias mais de uma N -upla de funções $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N)$ para conseguir todas as

configurações compatíveis com os vínculos em função de n variáveis independentes. Contudo, o Teorema da Função implícita nos fornece todas as N -uplas de funções necessárias. Em nosso estudo não precisaremos nos preocupar com essa questão e nos limitaremos a considerar uma dada n -upla de funções, como as definidas em (10.11). As coordenadas independentes q_1, \dots, q_n são chamadas **coordenadas generalizadas** do sistema vinculado de partículas. O número n dessas coordenadas é, por definição, a **dimensão do espaço de configurações** do sistema vinculado.

É importante notar a arbitrariedade na escolha das coordenadas generalizadas. De fato, pelas condições do Teorema da Função Implícita, nada nos impede substituir as coordenadas q_1, \dots, q_n por quaisquer outras coordenadas q'_1, \dots, q'_n dadas por funções

$$q'_i = f_i(q_1, \dots, q_n; t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10.12)$$

desde que o Jacobiano dessa transformação de coordenadas seja diferente de zero, $\det[\partial q_i / \partial q_j] \neq 0$. Naturalmente, o domínio de (q'_1, \dots, q'_n) é um aberto \mathcal{U}'^n de \mathbb{R}^n em correspondência biunívoca com \mathcal{U}^n por meio da função $f = (f_1, \dots, f_n)$. Uma tal mudança de coordenadas nos leva a novas funções \mathbf{f}'_k ($k = 1, \dots, N$) que nos dão \mathbf{r}_k ($k = 1, \dots, N$) a partir de q'_i ($i = 1, \dots, n$). As novas coordenadas q'_i ($i = 1, \dots, n$) também são ditas generalizadas e, como veremos, o formalismo que desenvolvermos não é afetado por um tal tipo de mudança de coordenadas. As transformações f_i ($i = 1, \dots, n$) entre coordenadas generalizadas são chamadas **transformações de contato**.

As velocidades em movimentos compatíveis com os vínculos são obtidas derivando-se (10.11) em relação ao tempo,

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \quad (k = 1, \dots, N), \quad (10.13)$$

onde $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ assume quaisquer valores em \mathbb{R}^n . De fato, as coordenadas generalizadas são independentes e podemos definir para elas variações independentes e velocidades independentes que, por construção, levam a velocidades das partículas que satisfazem os vínculos holônomos que estamos considerando. Como, por hipótese não há outros vínculos, as velocidades $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ são variáveis independentes que podem assumir quaisquer valores reais. As variáveis $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ são chamadas **velocidades generalizadas**. O número de velocidades generalizadas independentes é chamado **número de graus de liberdade** do sistema de partículas e será representado por ℓ . Como acabamos de discutir, para sistemas sob vínculos exclusivamente holônomos, o número de velocidades generalizadas é igual ao número de coordenadas generalizadas, *i.e.*, o número de graus de liberdade do sistema de partículas é igual à dimensão de seu espaço de configurações, $\ell = n$.

Os deslocamentos virtuais infinitesimais instantâneos compatíveis com os vínculos são obtidos variando-se (10.11),

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (k = 1, \dots, N), \quad (10.14)$$

onde $\delta q_1, \dots, \delta q_\ell$ são variações infinitesimais arbitrárias e independentes das coordenadas generalizadas. Podemos chamar essas variações independentes **deslocamentos virtuais infinitesimais generalizados**. O número desses deslocamentos é, obviamente, igual ao número de graus de liberdade do sistema de partículas sujeito a vínculos exclusivamente holônomos.

Agora, voltamos à expressão (10.10) para expressá-la em termos de deslocamentos virtuais generalizados. Para o trabalho virtual dado em (10.10) temos, em virtude de (10.14),

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i \delta q_i, \quad (10.15)$$

onde as quantidades Q_i ($i = 1, \dots, \ell$) são definidas como funções de coordenadas generalizadas, de velocidades generalizadas e do tempo, por meio de

$$Q_i(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.16)$$

Essas quantidades são chamadas **forças generalizadas** (embora o mais das vezes não sejam componentes de forças e não admitam qualquer interpretação nesse sentido). Para escrever o somatório em (10.10) que envolve acelerações, seguimos o procedimento descoberto por Lagrange. Começamos por usar (10.14) para escrever

$$\sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{k=1}^N m_k \frac{d\dot{\mathbf{r}}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i, \quad (10.17)$$

onde

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) - \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (10.18)$$

O ponto essencial do procedimento consiste em reconhecer as seguintes identidades devidas a Lagrange,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i}. \quad (10.19)$$

Para demonstrar essas identidades, devemos ter em mente que, coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas e o tempo são variáveis independentes e que, de acordo com (10.11), \mathbf{r}_k não depende das velocidades generalizadas. Derivando (10.13) em relação a \dot{q}_i obtemos a primeira das identidades em (10.19). Para obter a segunda, calculamos a derivada temporal total de $\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i$ e escrevemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right). \quad (10.20)$$

A expressão entre parênteses no último termo é, de acordo com (10.13), a velocidade $\dot{\mathbf{r}}_k$, de modo que resulta de (10.20) a segunda identidade de Lagrange em (10.19). Estando demonstradas as identidades de Lagrange, podemos usá-las em (10.18) para obter

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_k^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_k^2 \right). \quad (10.21)$$

Usando esse resultado no membro direito de (10.17), temos

$$\sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i, \quad (10.22)$$

onde T é a energia cinética do sistema,

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2. \quad (10.23)$$

As expressões (10.11) e (10.13), para as posições e velocidades das partículas, nos permitem escrever essa energia cinética em função das coordenadas e velocidades generalizadas. Temos

$$\begin{aligned} T(q_1, \dots, q_{\ell}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{\ell}; t) &= \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{1}{2} A_{ij}(q_1, \dots, q_{\ell}; t) \dot{q}_i \dot{q}_j \\ &+ \sum_{i=1}^{\ell} B_i(q_1, \dots, q_{\ell}; t) \dot{q}_i + T_0(q_1, \dots, q_{\ell}; t), \end{aligned} \quad (10.24)$$

onde, por definição,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}, \quad B_i = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \quad \text{e} \quad T_0 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}. \quad (10.25)$$

Notemos que $A_{ij} = A_{ji}$ e que B_i e T_0 são nulos quando a função (10.11) não depende explicitamente do tempo, *i.e.*, quando $\partial \mathbf{r}_k / \partial t = 0$.

Finalmente, podemos escrever a equação (10.10) em termos de coordenadas, velocidades e deslocamentos virtuais generalizados. Substituindo nela as expressões obtidas em (10.22) e (10.15), obtemos

$$\sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0. \quad (10.26)$$

Uma vez que os deslocamentos virtuais generalizados são independentes, obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.27)$$

Essas são as celebradas **equações de movimento lagrangianas**. São ℓ equações diferenciais de segunda ordem para ℓ coordenadas generalizadas. Elas são dadas em forma explícita por

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \frac{dq_j(t)}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.28)$$

Supomos que sejam equações normais, *i.e.*, equações nas quais podemos isolar as derivadas de ordem máxima em função das derivadas de ordem inferior, das próprias funções incógnitas e da variável independente. Devemos pois supor

$$\det \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] \neq 0. \quad (10.29)$$

Em princípio, as equações de movimento lagrangianas determinam soluções $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, \ell$) que, substituídas em (10.11) determinam os movimentos possíveis do sistema, *i.e.*, os movimentos $\mathbf{r}_k(t)$ ($k = 1, \dots, N$) compatíveis com os vínculos. Dado um tal movimento, podemos substituí-lo na Segunda Lei de Newton (10.5), para determinar as reações vinculares durante esse movimento como funções do tempo. Com isso, o problema enunciado no início dessa seção fica completamente resolvido pelo método de eliminação de reações vinculares por meio do Princípio de D'Alembert. Notemos que existe também um método, embora dele não nos ocupemos, para determinar as reações vinculares sem precisar voltar às equações de movimento (10.5) na forma newtoniana, mas usando apenas o formalismo de coordenadas e velocidades generalizadas.

Observemos que, na procura da solução do problema do movimento de um sistema vinculado, fomos levados a equações de movimento lagrangianas, dadas em termos de coordenadas generalizadas. Essas coordenadas especificam univocamente cada configuração do sistema massão arbitrárias na medida em que podem ser modificadas por qualquer transformação de contato (10.12). Essa situação contrasta com as equações de movimento newtonianas, que são dadas pela Segunda Lei de Newton em termos de coordenadas exclusivamente cartesianas. No formalismo newtoniano, se desejarmos obter equações de movimento em termos de coordenadas não cartesianas, devemos primeiramente usar a Segunda Lei para obtermos equações de movimento para as coordenadas cartesianas das partículas e, nessas equações, fazermos a transformação para as coordenadas não cartesianas. Para resolvermos o mesmo problema no formalismo lagrangiano, escrevemos o lagrangiano em termos do sistema de coordenadas não cartesiano e das equações lagrangianas de movimento obtemos imediatamente as equações de movimento para essas coordenadas. Obviamente, se as coordenadas do lagrangiano forem as coordenadas cartesianas das partículas, as resultantes equações de movimento lagrangianas serão idênticas às equações de movimento newtonianas.

10.3 Lagrangiano

Consideremos a situação em que as forças dadas sobre o sistema de partículas sejam forças conservativas. Nesse caso, elas são forças que dependem apenas da configuração do sistema e existe para ele uma energia potencial, *i.e.* uma função U , também depende apenas da configuração do sistema, para a qual

$$\mathbf{F}_k = \mathcal{F}_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (10.30)$$

onde \mathbf{F}_k é a força dada total sobre a k -ésima partícula do sistema. Usando as funções (10.11), que expressam a configuração do sistema em termos de coordenadas gener-

alizadas, podemos expressar a energia potencial em função de coordenadas generalizadas (usaremos o mesmo símbolo U para a função composta assim obtida),

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = U(q_1, \dots, q_\ell; t). \quad (10.31)$$

Nesse caso, podemos escrever as forças generalizadas como derivadas parciais da energia potencial expressa como função das coordenadas generalizadas. Com efeito, usando (10.16), obtemos

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad (10.32)$$

ou seja,

$$Q_i(q_1, \dots, q_\ell; t) = - \frac{\partial}{\partial q_i} U(q_1, \dots, q_\ell; t) \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.33)$$

Substituindo esse resultado nas equações de movimento lagrangianas (10.27), chegamos a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.34)$$

Levando em conta que U não depende das velocidades generalizadas, temos $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$, de modo que (10.34) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad (10.35)$$

onde usamos a função L definida por

$$L(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) = T(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) - U(q_1, \dots, q_\ell; t). \quad (10.36)$$

Naturalmente, essa definição usa o fato de que já foram obtidas as expressões das energias cinética e potencial em função das coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo, tal como explicitado em (10.24) e (10.31). A função L definida em (10.36) é chamada **lagrangiano** do sistema de partículas em consideração. Também as equações (10.35) são chamadas **equações de movimento lagrangianas**, ou **equações de movimento de Euler-Lagrange**.

Para que as equações lagrangianas (10.27) assumam a forma (10.35), não é necessário que as forças dadas sejam conservativas. De fato, a condição mais geral para que assumam essa forma, com um lagrangiano dependente de coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo, é que exista uma função U dessas mesmas variáveis e que as forças generalizadas sejam dadas por

$$Q_i(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) U(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.37)$$

No caso geral, essa função não tem o significado de energia potencial e não leva necessariamente à conservação da quantidade $T - U$. Vamos chamá-la **função potencial** do sistema de partículas. Obviamente, um caso particular da função potencial é dado

pela energia potencial do sistema com forças aplicadas conservativas, caso em que a função potencial não depende das velocidades generalizadas.

As equações lagrangianas (10.35) nos fornecem as equações de movimento ao fazermos as identificações $q_i = q_i(t)$ e $\dot{q}_i = dq_i(t)/dt$ ($i = 1, \dots, \ell$), após tomarmos as derivadas parciais indicadas nas equações. Naturalmente, as funções $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, \ell$) são as funções procuradas como solução das equações de movimento lagrangianas. Fazendo nessas equações as derivadas indicadas, chegamos às seguintes equações diferenciais para as funções $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, \ell$),

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \frac{dq_j(t)}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad (10.38)$$

que também são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que supomos normais, *i.e.*, o lagrangiano deve satisfazer a propriedade

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] \neq 0. \quad (10.39)$$

Um sistema descrito por um lagrangiano com essa propriedade é dito um **sistema regular**. Um sistema que não é regular exige um tratamento teórico todo especial, que não consideraremos nesse nosso estudo introdutório.

Consideremos que nas equações lagrangianas (10.35) o lagrangiano L do sistema físico seja substituído por uma função arbitrária Ξ das coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo. Nesse caso temos as equações

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Xi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Xi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.40)$$

Perguntemos, então, sob que condições essas equações são meras identidades para as funções incógnitas $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, \ell$), *i.e.*, os membros esquerdos dessas equações são nulos para quaisquer valores de acelerações, de velocidades e de coordenadas generalizadas. Nesse caso (10.40) não estabelecem nenhuma relação efetiva entre as acelerações, velocidades e coordenadas generalizadas. É fácil verificar que as equações (10.40) são identidades se Ξ for a derivada temporal total de uma função apenas das coordenadas generalizadas e do tempo, *i.e.*, denotando essa última função por Λ , obtemos que Ξ dada por

$$\Xi(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) = \frac{d}{dt} \Lambda(q_1, \dots, q_\ell; t) \quad (10.41)$$

torna (10.40) uma identidade para funções $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, \ell$). É também possível demonstrar, embora seja um pouco mais difícil, que (10.41) é a condição necessária para que (10.40) seja um identidade. Portanto, (10.41) é a condição necessária e suficiente para que (10.40) seja um identidade. Com esse resultado em mãos podemos determinar uma condição para que dois lagrangianos dêem origem às mesmas equações de movimento para um dado sistema físico. Eles devem diferir por uma derivada temporal total de uma função apenas das coordenadas generalizadas e do tempo e,

de resto, arbitrária. Denotando os dois lagrangianos por L e L' e por Λ a função, a condição se escreve como

$$L'(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) - L(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) = \frac{d}{dt}\Lambda(q_1, \dots, q_\ell; t) \quad (10.42)$$

Desse modo, os mesmos movimentos reais de um dado sistema físico são determinados indiferentemente pelo lagrangiano L e pelo lagrangiano L' , pois ambos dão origem às mesmas equações de movimento para o sistema; expressamos essa importante propriedade dizendo que L e L' descrevem igualmente o sistema em consideração ou que são lagrangianos equivalentes.

Dado um lagrangiano L do sistema físico, a transformação definida por (10.42),

$$L \mapsto L' = L + \frac{d}{dt}\Lambda \quad (10.43)$$

pode ser chamada uma **transformação de calibre do lagrangiano**. Pelo que vimos, um sistema físico determina seu lagrangiano a menos de transformações de calibre. Dizemos que uma transformação de calibre do lagrangiano não altera a dinâmica do sistema que ele descreve.

Para resolvermos um problema no formalismo lagrangiano, o primeiro passo consiste em determinar as coordenadas generalizadas a serem usadas para descrever as configurações do sistema vinculado. Normalmente, não há necessidade de começar pelas coordenadas cartesianas e inverter as equações de vínculo (10.4) para eliminar parte das coordenadas e obter apenas as coordenadas independentes que denominamos coordenadas generalizadas. Esse método foi usado para entendermos sob que condições e como funciona o formalismo lagrangiano. Na prática obtemos por inspeção do sistema vinculado as relações (10.11) entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas generalizadas. Então, usamos essas relações nas expressões das energias cinética e potencial em termos de coordenadas cartesianas para obter essas mesmas energias em termos de coordenadas generalizadas. Com essas últimas escrevemos o lagrangiano do sistema que, se quisermos, pode ser modificado por uma relação de calibre. Na verdade, há lagrangianos com termos que são, manifestamente, derivadas totais de funções que dependem apenas das coordenadas generalizadas e do tempo; nesse caso, é óbvia a transformação de calibre que elimina tais termos e resulte em um lagrangiano que pode ser mais simples. De posse do lagrangiano obtemos as equações de movimento de Lagrange para resolver o problema em tela. Nisso consiste o que podemos chamar método lagrangiano para a solução de problemas dinâmicos. Finalmente, observemos que, por meio de exemplos, podemos aprender diversos procedimentos que atalham esse método.

10.4 Teoremas de conservação no formalismo lagrangiano

As equações lagrangianas (10.35) afirmam que a taxa temporal instantânea de variação da quantidade $\partial L/\partial \dot{q}_i$ é igual a $\partial L/\partial q_i$ ($i = 1, \dots, \ell$). Essa quantidade desempenha um papel importante em Mecânica e é chamada **momento conjugado à coordenada generalizada** q_i ; representando-o por p_i , temos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.44)$$

e as equações de lagrangianas (10.35) podem ser escritas na forma

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.45)$$

Obviamente, o momento conjugado é uma função das coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo. Pela observação que acabamos de fazer, se alguma coordenada generalizada estiver ausente no lagrangiano, o momento conjugado a ela é uma constante de movimento,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \implies p_i = \text{constante}. \quad (10.46)$$

Uma coordenada ausente em um lagrangiano é dita uma **coordenada ignorável**, ou uma **coordenada cíclica**.

Se tanto q_i quanto \dot{q}_i estivessem ausentes no lagrangiano, as equações de movimento envolveriam apenas as demais coordenadas que, em obediência ao princípio do determinismo newtoniano, seriam suficientes para determinar todos os movimentos possíveis do sistema. Isso significaria que a dimensão do espaço de configurações e o número de graus de liberdade seriam uma unidade menor do que os seus valores previamente determinados, o que seria absurdo. Portanto, Se q_i for uma coordenada ignorável, a velocidade generalizada correspondente, \dot{q}_i , está necessariamente presente no lagrangiano e, conseqüentemente, no momento conjugado (10.44). Com isso, na relação que expressa a conservação desse momento, $p_i(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) = \text{constante}$, está presente q_i e ausente \dot{q}_i . Conseqüentemente, se invertermos essa relação para isolar \dot{q}_i , obtemos essa velocidade generalizada como uma função de coordenadas generalizadas, de velocidades generalizadas e do tempo, que não envolve q_i nem \dot{q}_i . Usando essa função nas equações diferenciais de movimento (10.38), podemos eliminar delas a coordenada ignorável q_i e a velocidade \dot{q}_i e, com isso, diminuirmos a complexidade do problema. As soluções das equações assim obtidas podem ser substituídas na função para determinar \dot{q}_i e, por integração, também q_i .

As equações lagrangianas de movimento (10.35) estabelecem relações entre as derivadas parciais do lagrangiano. Vejamos as implicações dessas relações na expressão da derivada temporal total do lagrangiano. Temos

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\ell} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right] + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (10.47)$$

onde a expressão entre colchetes é a derivada temporal total de $(\partial L/\partial \dot{q}_i)\dot{q}_i$, de modo que obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (10.48)$$

que é uma expressão invariante sob transformações de calibre do lagrangiano, *i.e.*, ela permanece válida se trocarmos o lagrangiano que nela aparece por qualquer outro obtido dele por uma transformação de calibre. A quantidade que aparece entre parênteses em (10.48) é uma função das coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo; denotando-a por \mathcal{E} , temos

$$\mathcal{E}(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial L(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t). \quad (10.49)$$

Usando essa definição podemos escrever (10.48) na forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (10.50)$$

Conseqüentemente, se o lagrangiano não depender explicitamente do tempo, \mathcal{E} é uma constante de movimento,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies \mathcal{E} = \text{constante}. \quad (10.51)$$

Um **sistema autônomo** é, por definição, um sistema que pode ser descrito por um lagrangiano não depende explicitamente do tempo. Conseqüentemente, todo sistema autônomo possui uma constante de movimento \mathcal{E} da forma definida em (10.49). No caso em que a energia cinética é uma função quadrática das velocidades generalizadas, *i.e.*, em que $B_i = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$) e $T_0 = 0$ em (10.25), e a função potencial U definida em (10.37) é uma energia potencial, *i.e.*, depende apenas das coordenadas generalizadas, \mathcal{E} coincide com a energia mecânica usual, $\mathcal{E} = E = T + U$. Mesmo quando isso não acontece é comum denominar \mathcal{E} energia do sistema.

Notemos que, no formalismo newtoniano, para obter grandezas conservadas devemos investigar se as forças sobre o sistema possuem certas propriedades como, por exemplo, serem conservativas ou centrais, e a partir disso determinar as grandezas conservadas como, por exemplo, energia ou momento angular. No formalismo lagrangiano, podemos obter grandezas conservadas inspecionando características meramente algébricas do lagrangiano do sistema, como não depender de uma certa variável. Notemos, além disso, que a propriedade do lagrangiano não depender de uma certa variável pode ser associada a simetrias do lagrangiano e, portanto, do sistema em consideração. De fato, consideremos um primeiro exemplo em que efetuamos uma translação δq_i na coordenada generalizada q_i . Se o lagrangiano não depende dela, ele permanece invariante sob a transformação de coordenada $q_i \mapsto q_i + \delta q_i$. Portanto o sistema, é simétrico sob essa transformação que, por esse motivo, é dita uma transformação de simetria do sistema; dizemos que o sistema é simétrico sob a translação $q_i \mapsto q_i + \delta q_i$. De acordo com (10.46), essa simetria implica que a derivada parcial do

lagrangiano relativa a q_i é nula e, portanto, que o momento conjugado p_i é conservado. Desse modo, a simetria sob translação em uma coordenada implica na conservação do momento conjugado à ela. Passemos ao segundo exemplo, em que efetuamos uma translação δt no tempo t . Se o lagrangiano não depende explicitamente do tempo, ele permanece invariante sob a translação temporal $t \mapsto t + \delta t$. Dizemos que o sistema é simétrico sob translação temporal, que é dita uma transformação de simetria do sistema. De acordo com (10.51), a simetria do sistema sob translação temporal implica na conservação da energia (10.49) do sistema. Notemos que é comum tomar como definição de energia a grandeza conservada devido à simetria do sistema por translação temporal. Como veremos, de um modo geral simetrias de um sistema sob transformações infinitesimais de coordenadas e do tempo dão origem a grandezas conservadas do sistema.

10.5 Equações canônicas de Hamilton

As equações lagrangianas de movimento (10.35) são ℓ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem para as ℓ funções do tempo incógnitas q_1, \dots, q_ℓ . Em forma explícita as equações são dadas por (10.38). Podemos transformar essas ℓ equações de segunda ordem em 2ℓ equações equivalentes de primeira ordem, pelo procedimento usual. Definimos 2ℓ funções independentes $q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell$ e consideramos as ℓ relações $\dot{q}_i = dq_i/dt$ ($i = 1, \dots, \ell$) como ℓ equações diferenciais de primeira ordem para as 2ℓ funções. Além disso, usamos as relações $\dot{q}_i = dq_i/dt$ ($i = 1, \dots, \ell$) para eliminar derivadas de segunda ordem em (10.38). Ao final, obtemos para as 2ℓ funções independentes $q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell$ as seguintes 2ℓ equações diferenciais de primeira ordem

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.52)$$

Tais equações apresentam um aspecto desproporcionalmente assimétrico. As ℓ primeiras equações são incomparavelmente mais complicadas que as ℓ últimas. Equações mais simples e simétricas são obtidas mudando-se as variáveis velocidades generalizadas para as variáveis momentos conjugados e, também, usando uma nova função no lugar do Lagrangiano para expressar as equações de movimento.

Explicitando a dependência funcional do lagrangiano na definição (10.44) de momento conjugado, temos as seguintes relações com q_i e \dot{q}_i ($i = 1, \dots, \ell$),

$$p_i = \frac{\partial L(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (10.53)$$

Elas podem ser consideradas como as funções de mudança das variáveis $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell$ para as variáveis p_1, \dots, p_ℓ , pois a condição de que tais funções possam ser invertidas, $\det[\partial p_i / \partial \dot{q}_j] \neq 0$ é idêntica à já suposta condição (10.39) de que o sistema em

consideração é regular. Agora, observamos que

$$dL = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{dp_i}{dt} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (10.54)$$

onde a expressão final foi obtida usando-se a definição de momento conjugado (10.44) e as equações lagrangianas na forma (10.45). Os diferenciais independentes dessa expressão, dq_i , $d\dot{q}_i$ ($i = 1, \dots, \ell$) e dt , deixam claro que o lagrangiano L é uma função das variáveis q_i , \dot{q}_i ($i = 1, \dots, \ell$) e t . Agora usamos na expressão final de (10.54) a identidade $p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$ e obtemos

$$d \left(\sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(-\frac{dp_i}{dt} dq_i + \frac{dq_i}{dt} dp_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (10.55)$$

O membro esquerdo dessa equação é o diferencial da energia (10.49) e o membro direito mostra que esse diferencial é também o diferencial de uma função das variáveis q_i , p_i ($i = 1, \dots, \ell$) e t , *i.e.*, no diferencial da expressão $\mathcal{E}(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t)$ da energia as coordenadas e as velocidades generalizadas já estão na combinação certa para podermos escrever esse diferencial em termos de coordenadas generalizadas e momentos conjugados, tal como aparece no membro direito da equação (10.55). A função de coordenadas generalizadas, de momentos conjugados e do tempo, que tem o mesmo valor que a energia como função das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e do tempo, é chamada **hamiltoniano** do sistema físico em tela. Representando-o por H , temos

$$H(q_1, \dots, q_\ell; p_1, \dots, p_\ell; t) = \mathcal{E}(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t), \quad (10.56)$$

ou seja

$$H(q_1, \dots, q_\ell; p_1, \dots, p_\ell; t) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t), \quad (10.57)$$

onde, naturalmente, se entende que essas relações são verdadeiras se os momentos conjugados nela envolvidos estão relacionados com a demais variáveis pelas relações (10.53). A expressão explícita da função H é obtida isolando-se as velocidades generalizadas em (10.53) e substituindo as expressões obtidas para elas (em termos de coordenadas generalizadas, de momentos conjugados e do tempo), no membro direito de (10.57). Devido à igualdade (10.56), diz-se algumas vezes que o hamiltoniano é a energia o sistema (considerada como função de coordenadas, momentos e tempo).

Usando-se a definição (10.57) de hamiltoniano em (10.55), temos

$$dH = \sum_{i=1}^{\ell} \left(-\frac{dp_i}{dt} dq_i + \frac{dq_i}{dt} dp_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (10.58)$$

Escrevendo a expressão genérica do diferencial de H ,

$$dH = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (10.59)$$

e comparando os coeficientes dos diferenciais independentes dessa expressão com os da expressão (10.58), chegamos às equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, \ell) \quad (10.60)$$

e também à seguinte relação

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (10.61)$$

Partindo de (10.60) podemos refazer o caminho de volta até (10.44) e (10.45), *i.e.*, até às equações lagrangianas. Portanto, as equações (10.60) são 2ℓ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem perfeitamente equivalentes às ℓ equações diferenciais lagrangianas de segunda ordem. As equações (10.60) são chamadas **equações canônicas de Hamilton** ou **equações de movimento hamiltonianas**. Observe-mos que as equações hamiltonianas já estão em forma normal e tem uma forma extremamente simples e simétrica, pelo menos se comparadas com as 2ℓ equações de primeira ordem (10.52). A relação (10.61) nos mostra que um sistema é autônomo se, e somente se, puder ser descrito por um hamiltoniano que não depende explicitamente do tempo.

Usando as equações canônicas hamiltonianas (10.60) na expressão da derivada total do hamiltoniano,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (10.62)$$

obtemos

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (10.63)$$

i.e., o hamiltoniano varia com o tempo se, e somente se, depende explicitamente do tempo. Portanto, se o sistema for autônomo, teremos um hamiltoniano que é uma constante de movimento.

Uma outra conseqüência importante das equações canônicas hamiltonianas é a forma simples que elas proporcionam à derivada temporal de qualquer função A das variáveis dinâmicas $q_1, \dots, q_\ell, p_1, \dots, p_\ell$ e do tempo t . Temos a definição da derivada temporal de A ,

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (10.64)$$

que, em virtude das equações canônicas hamiltonianas, pode ser escrita como

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (10.65)$$

Definimos **colchete de Poisson** de duas funções A e B das variáveis dinâmicas e do tempo como sendo a função das mesmas variáveis dinâmicas e do tempo dada por

$$[A, B] = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right). \quad (10.66)$$

Com essa definição a derivada temporal (10.65) pode ser escrita como

$$\frac{dA}{dt} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} . \quad (10.67)$$

Quando a função não depende das variáveis dinâmicas o seu colchete de Poisson com o hamiltoniano, ou com qualquer outra função, é nulo. Nesse caso a evolução temporal da função não depende da evolução temporal do sistema e é dada por sua dependência explícita no tempo. Naturalmente, essa dependência é devida a fatores externos ao sistema. Em contrapartida, o colchete de Poisson da função com o hamiltoniano determina a evolução temporal da função devida ao movimento do sistema. A taxa total de variação da função é devida à ação conjunta desses dois fatores, como descrito pela equação (10.67).

O colchete de Poisson de duas funções é linear em cada uma delas, *i.e.*, é uma função bilinear do par de funções. Além disso, goza das propriedades de antissimetria,

$$[A, B] = -[B, A] , \quad (10.68)$$

para qualquer par de funções A e B , e de satisfazer a identidade de Jacobi

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 , \quad (10.69)$$

para qualquer trinca de funções A , B e C . A demonstração da antissimetria é imediata, ao contrário da identidade de Jacobi, que é trabalhosa. Também temos para os colchetes de Poisson,

$$[A, \lambda] = 0 , \quad (10.70)$$

para qualquer constante λ , e

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] , \quad (10.71)$$

para qualquer trinca de funções A , B e C .

Os colchetes de Poisson das variáveis dinâmicas são chamados **colchetes de Poisson fundamentais** e são dados por

$$[q_i, q_j] = 0 , \quad [p_i, p_j] = 0 \quad \text{e} \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij} . \quad (10.72)$$

Um teorema importante devido a Poisson afirma que o colchete de Poisson de duas constantes de movimento é uma constante de movimento. A demonstração desse teorema se faz facilmente com o auxílio da fórmula (10.67), para a derivada temporal de uma função, e da identidade de Jacobi (10.69).

Usando os colchetes de Poisson obtemos das equações hamiltonianas de movimento (10.60) as seguintes 2ℓ equações equivalentes,

$$\frac{dq_i}{dt} = [q_i, H] \quad \text{e} \quad \frac{dp_i}{dt} = [p_i, H] \quad (i = 1, \dots, \ell) . \quad (10.73)$$

Essas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem podem ser chamadas **equações de movimento poissonianas**.

Sabemos que as equações lagrangianas de movimento são invariantes por transformações de contato (10.12). Também as equações hamiltonianas de movimento são invariantes sob essas transformações, pois foram obtidas das equações lagrangianas sem nenhuma restrição sobre as coordenadas envolvidas. Uma vez que a forma altamente simétrica das equações hamiltonianas (10.60) apresenta coordenadas generalizadas e momentos conjugados quase como indistinguíveis, somos levados a suspeitar que essas equações podem ser invariantes sob uma classe mais geral de transformações que envolvam as coordenadas generalizadas e os momentos conjugados. De fato, existem transformações desse tipo, chamadas **transformações canônicas**. Elas são definidas como transformações da forma

$$q_i = f_i(q_1, \dots, q_\ell; p_1, \dots, p_\ell; t) \quad \text{e} \quad p_i = g_i(q_1, \dots, q_\ell; p_1, \dots, p_\ell; t) \quad (i = 1, \dots, \ell) . \quad (10.74)$$

e que deixam invariantes os colchetes de Poisson. Um caso particular dessas transformações é dada pelas transformações de contato (10.12). A ampla liberdade de mudar de variáveis dinâmicas proporcionada pelas transformações canônicas torna o formalismo hamiltoniano poderoso para tratar problemas complicados. A teoria das transformações canônicas é apresentada em estudos mais avançados de Mecânica Analítica.

10.6 Princípio da ação

As leis da Mecânica podem ser formuladas de um modo econômico e apropriado para generalizações, por meio do conceito de ação de um sistema. Para facilitar a apresentação dessa formulação, consideremos de início um sistema com um único grau de liberdade. O lagrangiano L é, então, função de uma coordenada generalizada q , de uma velocidade generalizada \dot{q} e do tempo t . Para facilitar a apresentação, também suspendemos por ora o uso da notação desleixada, na qual função e valor da função são representados pela mesma letra; agora, voltaremos a representar uma função-movimento por uma letra distinta, digamos φ , de modo a escrever $q = \varphi(t)$ e não $q = q(t)$. Como de costume, φ pode representar um movimento virtual ou real do sistema.

Seja φ um movimento do sistema e tomemos as variáveis q e \dot{q} do Lagrangiano L como dadas por $q = \varphi(t)$ e $\dot{q} = \dot{\varphi}(t)$, onde, naturalmente, $\dot{\varphi}$ é a derivada da função φ . Façamos a composição de L com φ e $\dot{\varphi}$,

$$L(q, \dot{q}, t) = L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), t) . \quad (10.75)$$

A função composta é uma função do tempo t e da função-movimento φ . Integrando essa função composta de um instante t_1 a um instante t_2 , obtemos um número que é função da função-movimento φ e dos números t_1 e t_2 . Representando essa função por S , temos

$$S(\varphi; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), t) dt . \quad (10.76)$$

Para valores fixos de t_1 e t_2 , podemos considerar S como função apenas da função-

movimento φ , e escrever

$$S(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), t) dt . \quad (10.77)$$

Uma função como S , que transforma funções em números, costuma ser chamada **funcional**. Assim, S é chamado **funcional de ação** ou, simplesmente, **ação** do sistema físico entre os instantes t_1 e t_2 . Naturalmente, levando em conta também a dependência da ação dos instantes t_1 e t_2 , podemos dizer que a ação é um funcional do movimento e uma função desses instantes. Os instantes t_1 e t_2 do intervalo de integração $[t_1, t_2]$ podem ser chamados **instantes extremos** do intervalo, ou da ação.

Agora, consideremos uma função φ' infinitesimalmente próxima de φ , no sentido de que $\delta\varphi(t) = \varphi'(t) - \varphi(t)$ é infinitesimal para qualquer t no intervalo de tempo considerado. A quantidade $\delta\varphi(t)$ é a variação do valor da função φ no instante t , de modo que escrevemos $\delta q = \delta\varphi(t)$. A variação da função φ é representada por $\delta\varphi$, de modo que, com ela ocorre a seguinte mudança infinitesimal de função

$$\varphi \mapsto \varphi' = \varphi + \delta\varphi . \quad (10.78)$$

Façamos a restrição de que $\varphi'(t_1) = \varphi(t_1)$ e $\varphi'(t_2) = \varphi(t_2)$, *i.e.*, não há variação da função nos instantes extremos,

$$\delta\varphi(t_1) = 0 \quad \text{e} \quad \delta\varphi(t_2) = 0 . \quad (10.79)$$

A variação de função com essa propriedade é chamada **variação com extremos fixos**.

Se a função φ sofre uma tal variação infinitesimal $\delta\varphi$, a ação sofre uma variação

$$\delta S(\varphi) = S(\varphi + \delta\varphi) - S(\varphi) . \quad (10.80)$$

O **princípio da ação** afirma que os movimentos possíveis do sistema são os que extremizam a ação sob variações com extremos fixos, *i.e.*, um movimento φ é um movimento possível do sistema se, e somente se,

$$\delta S(\varphi) = 0 . \quad (10.81)$$

Uma vez que essa equação funcional determina os movimentos possíveis do sistema, também podemos chamá-la equação de movimento do sistema; é difícil imaginar que possa haver uma forma mais simples de equação de movimento.

Calculemos a variação da ação (10.80) sob a variação de função infinitesimal de movimento com extremos fixos. Temos, para (10.80),

$$\delta S(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(\varphi(t) + \delta\varphi(t), \frac{d}{dt}[\varphi(t) + \delta\varphi(t)], t) - L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), t) \right\} dt . \quad (10.82)$$

O integrando dessa expressão é a variação do lagrangiano

$$\delta L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t) = L(\varphi(t) + \delta\varphi(t), \dot{\varphi}(t) + \delta\dot{\varphi}(t); t) - L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t) . \quad (10.83)$$

Uma vez que $\delta\varphi(t)$ e $\delta\dot{\varphi}(t)$ são infinitesimais,

$$\delta L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t) = \frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \varphi(t)} \delta\varphi(t) + \frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \dot{\varphi}(t)} \frac{d}{dt} \delta\varphi(t). \quad (10.84)$$

Substituindo em (10.82) o integrando por essa expressão, obtemos

$$\delta S(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \varphi(t)} \delta\varphi(t) + \frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \dot{\varphi}(t)} \frac{d}{dt} \delta\varphi(t) \right] dt. \quad (10.85)$$

Usando a fórmula da derivada do produto no segundo termo do integrando, chegamos a

$$\begin{aligned} \delta S(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \varphi(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \dot{\varphi}(t)} \right] \delta\varphi(t) dt \\ + \left[\frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \dot{\varphi}(t)} \delta\varphi(t) \right] \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (10.86)$$

Mas, por construção, são nulas as variações da função-movimento nos extremos, como explicitado em (10.79); logo, o último termo na expressão (10.86) é nulo, de modo que podemos escrever

$$\delta S(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \varphi(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \dot{\varphi}(t)} \right] \delta\varphi(t) dt. \quad (10.87)$$

Aplicamos nessa variação da ação o princípio da ação (10.81), que afirma que essa variação é nula para qualquer variação de movimento $\delta\varphi$ nula nos extremos. Obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \varphi(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \dot{\varphi}(t)} \right] \delta\varphi(t) dt = 0. \quad (10.88)$$

Usando a arbitrariedade da variação infinitesimal $\delta\varphi$ no integrando dessa expressão, concluímos que o restante do integrando deve ser nulo, *i.e.*,

$$\frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \varphi(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t)}{\partial \dot{\varphi}(t)} = 0. \quad (10.89)$$

que escrevemos também na notação mais comum,

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}; t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}; t)}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (10.90)$$

Essa é a equação de movimento lagrangiana para o sistema de um grau de liberdade que estamos considerando. Portanto, ficou demonstrado que o princípio da ação implica a equação de movimento lagrangiana. É fácil inverter a demonstração e obter o princípio da ação a partir dessa equação. Com isso, podemos concluir que o princípio da ação, considerado como equação de movimento, é equivalente à equação de movimento lagrangiana.

Agora, consideremos o caso geral de um sistema com ℓ graus de liberdade e voltemos à notação em que representamos cada coordenada generalizada e sua função-movimento pelo mesmo símbolo, $q_i = q_i(t)$ ($i = 1, \dots, \ell$). Com essa notação devemos

ser cuidadosos em identificar, a cada momento, se q_i representa a i -ésima coordenada generalizada ou uma função-movimento para essa coordenada. Seja L o lagrangiano do sistema com ℓ graus de liberdade. A ação desse sistema é a função S definida por

$$S(q_1, \dots, q_\ell; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), \dots, q_\ell(t); \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_\ell(t); t) dt, \quad (10.91)$$

onde (q_1, \dots, q_ℓ) é uma função-movimento qualquer do sistema. Consideremos para as funções q_i ($i = 1, \dots, \ell$) variações infinitesimais δq_i ($i = 1, \dots, \ell$) com extremos fixos,

$$\delta q_i(t_1) = 0 \quad \text{e} \quad \delta q_i(t_2) = 0 \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad (10.92)$$

mas, de resto, arbitrárias. O princípio da ação afirma que os movimentos possíveis do sistema são os que extremizam a ação sob variações com extremos fixos,

$$\delta S(q_1, \dots, q_\ell; t_1, t_2) = 0. \quad (10.93)$$

Usando um caminho em tudo análogo ao seguido no caso de um grau de liberdade, concluímos, desse princípio da ação, que os movimentos possíveis do sistema devem satisfazer às equações

$$\frac{\partial L(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_1, \dots, q_\ell; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell; t)}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad (10.94)$$

que são as equações de movimento lagrangianas para o sistema em consideração. Nesse caso, de um número qualquer de graus de liberdade, também podemos obter o princípio da ação a partir das equações de movimento lagrangianas e concluir que o princípio, considerado como equação de movimento, é equivalente às equações.

A teoria matemática de máximos e mínimos, *i.e.*, de extremização, de funcionais é chamada cálculo das variações. Uma formulação de uma teoria em termos de extremização de funcionais é chamada uma **formulação variacional da teoria**. O princípio da ação (10.93) é chamado **princípio variacional de Hamilton** (1834). Ele é também, freqüentemente, chamado **princípio da mínima ação** porque é comum o caso em que o extremo da ação é um mínimo. As equações lagrangianas de movimento obtidas pelo princípio da mínima ação são chamadas **equações de Euler-Lagrange**.